

บทที่ 5

การสรุปผล อภิปรายผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้เราได้ศึกษาอันดับบางส่วนธรรมชาติบนกึ่งกรุป $BL(p, q)$ และกึ่งกรุป $PS(X, Y)$ ซึ่งผลของการวิจัยพบว่า

1. กำหนดให้ α, β เป็นสมาชิกในกึ่งกรุป $BL(p, q)$ จะได้ว่า

$$\alpha \leq \beta \text{ ก็ต่อเมื่อ } \alpha = \beta$$

2. กึ่งกรุป $BL(p, q)$ ไม่มีสมาชิกมากที่สุด

3. กึ่งกรุป $BL(p, q)$ ไม่มีสมาชิกน้อยสุด

4. ทุกสมาชิกในกึ่งกรุป $BL(p, q)$ เป็นสมาชิกใหญ่สุด

5. ทุกสมาชิกในกึ่งกรุป $BL(p, q)$ เป็นสมาชิกสมาชิกเล็กสุด

6. กำหนดให้ α, β เป็นสมาชิกในกึ่งกรุป $BL(p, q)$ จะได้ว่า

ขอบเขตล่างมากที่สุด $\alpha \wedge \beta$ จะหาได้ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$ และในกรณีนี้ $\alpha \wedge \beta = \alpha = \beta$

7. กำหนดให้ α, β เป็นสมาชิกในกึ่งกรุป $BL(p, q)$ จะได้ว่า

ขอบเขตบนน้อยสุด $\alpha \vee \beta$ จะหาได้ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$ และในกรณีนี้ $\alpha \vee \beta = \alpha = \beta$

8. ทุกสมาชิกในกึ่งกรุป $BL(p, q)$ มีสมบัติเข้ากันได้ทางซ้ายและทางขวา

9. ทุกสมาชิกในกึ่งกรุป $BL(p, q)$ ไม่มีสมาชิกปกคลุมบน และไม่มีสมาชิกปกคลุมล่าง

10. ให้ $|X| = p \geq q \geq \aleph_0$ และ กำหนด $\emptyset \neq Y \subseteq X$ โดยที่ $|X \setminus Y| \leq q$ จะได้ว่า

$PS(X, Y) = \{\alpha \in PS(p, q) : X\alpha \subseteq Y\}$ เป็นกึ่งกรุป

11. การแปลงศูนย์ $\emptyset \in PS(X, Y)$ ก็ต่อเมื่อ $p = q$ ในกรณีนี้ \emptyset จะเป็นสมาชิกศูนย์ของกึ่งกรุป $PS(X, Y)$

12. $PS(X, Y)$ ไม่มีสมบัติการตัดออกทางขวา

13. ให้ $\alpha, \beta \in PS(X, Y)$ จะได้ว่า $\alpha = \lambda\beta$ สำหรับบาง $\lambda \in PS(X, Y)$ ก็ต่อเมื่อ

1) $X\alpha \subseteq X\beta$

2) $(X\alpha)\beta^{-1} \subseteq Y$

3) $q \leq \max\{g(\beta), |X\beta \setminus X\alpha|\} \leq \max\{g(\alpha), q\}$

14. สำหรับ $\alpha, \beta \in PS(X, Y)$ จะได้

1) $id_{dom\alpha} = \alpha\alpha^{-1}$ และ $id_{X\alpha} = \alpha^{-1}\alpha$

2) $\beta\beta^{-1} \cap (dom\beta \times dom\alpha) \subseteq \alpha\alpha^{-1}$

15. ข้อความทั้ง 3 ต่อไปนี้สมมูลกันสำหรับ $\alpha, \beta \in PS(X, Y)$

1) $\alpha \subseteq \beta$

2) $X\alpha \subseteq X\beta$ และ $\alpha\beta^{-1} = \alpha\alpha^{-1}$

3) $X\alpha \subseteq X\beta$ และ $\alpha\beta^{-1} \subseteq \beta\beta^{-1}$

16. สำหรับ $\alpha, \beta \in PS(X, Y)$ จะได้ว่า

$\alpha \leq \beta$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$ หรือ $[\alpha \subseteq \beta$ และ $q \leq \max\{g(\beta), |X\beta \setminus X\alpha|\}$ และ $dom\alpha \subseteq Y]$

17. กึ่งกรุป $PS(X, Y)$ ไม่มีสมาชิกมากที่สุด

18. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงใน $PS(X, Y)$

(1) ถ้า $p = q$ แล้ว จะได้ว่า \emptyset เป็นสมาชิกน้อยสุด ใน $PS(X, Y)$ ภายใต้อันดับบางส่วน
ธรรมชาติ \leq

(2) ถ้า $p > q$ แล้ว $PS(X, Y)$ ไม่มีสมาชิกน้อยสุดภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติ \leq

19. $\alpha \in PS(X, Y)$ จะเป็นสมาชิกใหญ่สุดภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติ \leq ก็ต่อเมื่อ

(1) $g(\alpha) < q$ หรือ

(2) $X\alpha = Y$ หรือ

(3) $dom \alpha \not\subseteq Y$

20. ให้ $p = q$ และ $\alpha \in PS(X, Y)$ โดยที่ $\alpha \neq \emptyset$

ถ้า $dom \alpha \cap Y \neq \emptyset$ และ $dom \alpha \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ แล้ว α ไม่เป็นสมาชิกเล็กสุด ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติ \leq

21. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงใน $PS(X, Y)$

(1) ถ้า $p = q$ แล้ว จะได้ว่า α เป็นสมาชิกเล็กสุดไม่เป็นศูนย์ ใน $PS(X, Y)$ ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติ \leq ก็ต่อเมื่อ

(1.1) $|dom \alpha| = 1$ หรือ

(1.2) $dom \alpha \subseteq X \setminus Y$

(2) ถ้า $p > q$ แล้ว $PS(X, Y)$ ไม่มีสมาชิกเล็กสุดภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติ \leq

22. ทุกสมาชิกใน $PS(X, Y)$ มีสมบัติเข้ากันได้ทางขวาภายใต้ \leq

23. $L = \{\alpha \in PS(X, Y) : |dom \alpha| = 1 \text{ or } (g(\alpha) \geq q \text{ and } dom \alpha \subseteq Y)\}$

เป็นเซตของสมาชิกทั้งหมดที่มีสมบัติเข้ากันได้ทางซ้ายภายใต้ \leq ในกึ่งกรุป $PS(X, Y)$

24. ให้ $p = q$ และให้ $\alpha, \beta \in PS(X, Y)$ โดยที่ α และ β เปรียบเทียบกันไม่ได้

กำหนด $E = E(\alpha, \beta) = \{x \in dom \alpha \cap dom \beta : x\alpha = x\beta\}$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $E = \emptyset$ แล้ว $\alpha \wedge \beta = \emptyset$

(2) ถ้า $E \neq \emptyset$ แล้ว $\alpha \wedge \beta$ หาได้โดยที่ $\alpha \wedge \beta \neq \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $E \cap Y \neq \emptyset$ และ

$[g(\alpha) = p \text{ หรือ } g(\beta) = p]$ หรือ $|X\alpha \setminus (E \cap Y)\alpha| = p = |X\beta \setminus (E \cap Y)\beta|$

ในกรณีนี้ $\alpha \wedge \beta = \alpha|_{E \cap Y} = \beta|_{E \cap Y}$

25. ให้ $p > q$ และให้ $\alpha, \beta \in PS(X, Y)$ โดยที่ α และ β เปรียบเทียบกันไม่ได้

กำหนด $E = E(\alpha, \beta) = \{x \in \text{dom} \alpha \cap \text{dom} \beta : x\alpha = x\beta\}$ จะได้ว่า

$\alpha \wedge \beta$ หาได้ ก็ต่อเมื่อ $E \cap Y \neq \emptyset$ และ

$$(a) \max\{|X\alpha \setminus (E \cap Y)\alpha|, |X\beta \setminus (E \cap Y)\beta|\} \leq q \text{ และ}$$

$$(b) q \leq \max\{g(\alpha), |X\alpha \setminus (E \cap Y)\alpha|\} \text{ และ } q \leq \max\{g(\beta), |X\beta \setminus (E \cap Y)\beta|\}$$

ในกรณีนี้ $\alpha \wedge \beta = \alpha|_{E \cap Y} = \beta|_{E \cap Y}$

26. ให้ $\alpha, \beta \in PS(X, Y)$ โดยที่ α และ β เปรียบเทียบกันไม่ได้

จะได้ว่า $\alpha \vee \beta$ หาค่าได้ภายใต้ \leq ก็ต่อเมื่อ

$$(a) \text{ ทุก } x \in \text{dom} \alpha \cap \text{dom} \beta \text{ จะได้ } x\alpha = x\beta$$

$$(b) (\text{dom} \alpha \setminus \text{dom} \beta)\alpha \cap (\text{dom} \beta \setminus \text{dom} \alpha)\beta = \emptyset$$

$$(c) |X \setminus (X\alpha \cup X\beta)| = q$$

$$(d) \text{dom} \alpha \subseteq Y, \text{dom} \beta \subseteq Y$$

$$(e) q \leq |X \setminus (\text{dom} \alpha \cup \text{dom} \beta)| \text{ หรือ } \text{dom} \alpha \cup \text{dom} \beta = X \text{ หรือ } X\alpha \cup X\beta = Y$$

ในกรณีนี้ $\alpha \vee \beta = \alpha \cup \beta$

27. ให้ $\alpha, \beta \in PS(X, Y)$ โดยที่ $\alpha < \beta$ จะได้ว่า

β เป็นสมาชิกปกคลุมบนของ α ก็ต่อเมื่อ

$$|\text{dom} \beta \setminus \text{dom} \alpha| = 1 \text{ หรือ } (\text{dom} \beta \setminus \text{dom} \alpha) \cap Y = \emptyset$$

ในกรณีนี้จะเรียก α เป็นสมาชิกปกคลุมล่างของ β เช่นกัน

5.2 อภิปรายผล

ผลลัพธ์จากการศึกษาอันดับบางส่วนบนกึ่งกรุป $BL(p, q)$ และกึ่งกรุป $PS(X, Y)$ มีความแตกต่างกันค่อนข้างมากในทุกๆประเด็น ทั้งนี้เนื่องมาจากสมบัติพื้นฐานที่แตกต่างกันคือ $BL(p, q)$ มีสมบัติการตัดออกทางขวา ทำให้เงื่อนไขความสัมพันธ์ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติใน $BL(p, q)$ อยู่ในรูปแบบที่เรียบง่ายชัดเจน นั่นคือ $\alpha \leq \beta$ ใน $BL(p, q)$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$ ทำให้ผลลัพธ์ต่างๆ ที่ตามมาบน $BL(p, q)$ เกี่ยวกับอันดับบางส่วนนี้จะมีเงื่อนไขที่เรียบง่ายและเห็นได้ชัดเช่นเดียวกัน ต่างจาก $PS(X, Y)$ ซึ่งไม่มีสมบัติการตัดออกทางขวา จะเห็นได้ว่าเงื่อนไขความสัมพันธ์ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติใน $PS(X, Y)$ อยู่ในรูปแบบที่ซับซ้อนกว่าพอสมควร นั่นคือ $\alpha \leq \beta$ ใน $PS(X, Y)$ ก็ต่อเมื่อ

1. $\alpha = \beta$ หรือ
2. $[\alpha \subseteq \beta$ และ $q \leq \max\{g(\beta), |X \setminus \alpha|\}$ และ $dom \alpha \subseteq Y]$

ผลลัพธ์ต่างๆที่ตามมาบน $PS(X, Y)$ ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาตินี้ก็มีความซับซ้อนตามมาเช่นเดียวกัน

นอกจากนี้ เพราะว่า $PS(X, Y)$ เป็นนิยามทั่วไปของ $PS(p, q)$ ดังนั้น ผลของการศึกษาอันดับบางส่วนบน $PS(X, Y)$ ในโครงการวิจัยนี้ จะครอบคลุมผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาและผลงานตีพิมพ์ของ Singha, Sanwong และ Sullivan เกี่ยวกับ กึ่งกรุป $PS(p, q)$ ใน [4] และ [8] ในหลายๆประเด็นเช่น ความสัมพันธ์ของสองสมาชิกภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติ รวมไปถึงสมาชิกใหญ่สุด สมาชิกเล็กสุด สมาชิกมากที่สุด สมาชิกน้อยสุด เงื่อนไขการมีขอบเขตบนน้อยสุดและขอบเขตล่างมากที่สุด สมบัติการเข้ากันได้ทางซ้ายและทางขวา ยิ่งกว่านั้น เนื่องจากใน [4] และ [8] ยังไม่ได้มีการศึกษาประเด็นเงื่อนไขการมีสมาชิกปกคลุมบนและสมาชิกปกคลุมล่างของ แต่ละสมาชิกใน $PS(p, q)$ ดังนั้นผลที่เราได้ศึกษาประเด็นนี้บน $PS(X, Y)$ ในโครงการวิจัยนี้จึงถือได้ว่าเป็นการขยายความรู้ใหม่ทางวิชาการให้กว้างขึ้นออกไปด้วย

5.3 ข้อเสนอแนะ

ถึงแม้การศึกษา $PS(X, Y)$ ในโครงการวิจัยนี้ จะได้ผลลัพธ์ที่ครอบคลุมผลลัพธ์ที่เคยได้มาจากการศึกษาใน $PS(p, q)$ ของนักวิจัยคนอื่นๆ แต่ก็ครอบคลุมเฉพาะประเด็นหลักที่เกี่ยวข้องกับอันดับบางส่วนธรรมชาติเท่านั้น ยังมีอีกหลายประเด็นที่สามารถศึกษาได้ต่อไปบน $PS(X, Y)$ เช่น ความเป็นปรกติ (regularity) ความสัมพันธ์กรีน (Green's relations) หรือไอดีล (ideal) เป็นต้น ซึ่งผู้วิจัยจะขยายผลเพื่อศึกษาประเด็นเหล่านี้ต่อไปในอนาคต

