บทที่ 2

แนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 อันดับบางส่วนธรรมชาติ (Natural partial order)

ให้ X เป็นเซต จะเรียกความสัมพันธ์ $\leq$ บน X ว่าเป็นอันดับบางส่วน (partial order) ก็ต่อเมื่อ

(1) $x \leq x$ ทุก $x \in X$

(2) ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq x$ แล้ว $x = y$ ทุก $x, y \in X$

(3) ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq z$ แล้ว $x \leq z$ ทุก $x, y, z \in X$

ตัวอย่างของอันดับบางส่วนที่คุ้นเคยกันดี เช่น การเปรียบเทียบน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\leq$ บนเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ การหารลงตัวบนเซตของจำนวนเต็มบวก $\mathbb{Z}^+$ เป็นต้น

ให้ S เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและมีการดำเนินการทวิภาค $*$ (binary operation) ที่นิยามบน S จะเรียก $(S,*)$ ว่าเป็นกึ่งกรุป (semigroup) เมื่อ $(S,*)$ มีสมบัติ 2 ข้อต่อไปนี้

1. $a*b \in S$ ทุก $a,b \in S$ (สมบัติปิด)
2. $(a*b)*c = a*(b*c)$ ทุก $a,b,c \in S$ (สมบัติเปลี่ยนหมู่)

ตัวอย่างของกึ่งกรุปที่รู้จักกันดีและใช้ในชีวิตประจำวันเช่น เซตของจำนวนเต็มกับการบวกหรือการคูณ เป็นต้น

เพื่อความเข้าใจตรงกัน เราจะให้นิยามศัพท์ที่สำคัญเกี่ยวกับอันดับบางส่วน ซึ่งจะถูกใช้ไปตลอดทั้งโครงการวิจัยนี้ ดังต่อไปนี้

1. กำหนดให้ X เป็นเซต และ $\leq$ เป็นอันดับบางส่วนบน X

1.1 สมาชิก $a \in X$ จะเรียกว่าสมาชิกใหญ่สุด (maximal element) ถ้า $a \leq x$ โดยที่ $x \in X$ แล้ว $a = x$

1.2 สมาชิก $a \in X$ จะเรียกว่าสมาชิกเล็กสุด (minimal element)

ถ้า $x \le a$ โดยที่ $x \in X$ แล้ว $a = x$

1.3 สมาชิก $a \in X$ จะเรียกว่าสมาชิกมากสุด (maximum element) ถ้า $x \le a$ ทุก $x \in X$

1.4 สมาชิก $a \in X$ จะเรียกว่าสมาชิกน้อยสุด (minimum element) ถ้า $a \le x$ ทุก $x \in X$

1.5 สำหรับเซตย่อย Y ของ X สมาชิกขอบเขตล่าง (a lower bound) ของ Y หมายถึงสมาชิก $c \in X$ ที่ $c \le y$ ทุก $y \in Y$ สมาชิกขอบเขตล่าง c_0 ของ Y จะเรียกว่าสมาชิกขอบเขตล่างมากสุด (the greatest lower bound) ของ Y ถ้า $c \le c_0$ สำหรับทุกสมาชิกขอบเขตล่าง c ของ Y และเมื่อ $Y = \{a, b\}$ เราจะใช้สัญลักษณ์ $\alpha \wedge \beta$ แทนสมาชิกขอบเขตล่างมากสุดของ Y โดยเรียกว่ามีท (meet) ของ α และ β

1.6 สำหรับเซตย่อย Y ของ X สมาชิกขอบเขตบน (an upper bound) ของ Y หมายถึงสมาชิก $d \in X$ ที่ $y \le d$ ทุก $y \in Y$ สมาชิกขอบเขตบน d_0 ของ Y จะเรียกว่าสมาชิกขอบเขตบนน้อยสุด (the least upper bound) ของ Y ถ้า $d_0 \le d$ สำหรับทุกสมาชิกขอบเขตบน d ของ Y และเมื่อ $Y = \{a, b\}$ เราจะใช้สัญลักษณ์ $\alpha \vee \beta$ แทนสมาชิกขอบเขตบนน้อยสุดของ Y โดยเรียกว่าจอย (join) ของ α และ β

1.7 ให้ $a, b \in X$ โดยที่ $a < b$ (หมายถึง $a \le b$ แต่ $a \ne b$) จะเรียก b ว่าเป็นสมาชิกปกคลุมบน (upper cover) ของ a ถ้า $a < c \le b$ โดยที่ $c \in X$ แล้ว $c = b$ ในกรณีเดียวกันนี้เราเรียก a ว่าเป็นสมาชิกปกคลุมล่าง (lower cover) ของ b

2. ให้ ρ เป็นความสัมพันธ์บนกึ่งกรุป S

2.1 สมาชิก $c \in S$ จะเรียกว่ามีสมบัติเข้ากันได้ทางซ้าย (left compatible) ภายใต้ ρ ถ้า $ca \,\rho\, cb$ สำหรับทุก $a \,\rho\, b$

2.2 สมาชิก $c \in S$ จะเรียกว่ามีสมบัติเข้ากันได้ทางขวา (right compatible) ภายใต้ ρ ถ้า $ac \,\rho\, bc$ สำหรับทุก $a \,\rho\, b$

การศึกษาอันดับบางส่วน นอกจากจะศึกษาบนเซตแล้วยังสามารถศึกษาได้บนกึ่งกรุปที่สนใจอีกด้วย โดยหาก S เป็นกึ่งกรุปใดๆแล้ว จะสามารถนิยามอันดับบางส่วนรูปแบบหนึ่งบน S ได้โดย

$a \le b$ ก็ต่อเมื่อ $a = xb = by$ และ $a = ay$ สำหรับบาง $x, y \in S^1$

เมื่อ S^1 หมายถึงกึ่งกรุป S ที่เติมสมาชิกเอกลักษณ์เพิ่มเข้าไป แต่ในกรณีที่ S มีสมาชิกเอกลักษณ์อยู่แล้วจะกำหนดให้ $S^1 = S$ โดยจะเรียกอันดับบางส่วนดังกล่าวนี้ว่าอันดับบางส่วนธรรมชาติ (natural partial order) บนกึ่งกรุป S ซึ่งนิยามโดย Mitsch [3].

ในงานวิจัยหลายๆชิ้นที่ผ่านมานั้น นักคณิตศาสตร์ที่ศึกษาทฤษฎีกึ่งกรุปได้ศึกษาและตีพิมพ์เผยแพร่ผลงานเกี่ยวกับการศึกษาอันดับบางส่วนธรรมชาตินี้บนกึ่งกรุปที่สำคัญหลายๆตัวเช่นกึ่งกรุปการแปลงบางส่วน (partial transformation semigroup) $P(X) = \{\alpha : A \to B : A, B \subseteq X\}$ กึ่งกรุปการแปลงเต็ม (full transformation semigroup) $T(X) = \{\alpha \in P(X) : dom\,\alpha = X\}$ กึ่งกรุปการแปลงบางส่วนหนึ่งต่อหนึ่ง (injective partial transformation semigroup) $I(X) = \{\alpha \in P(X) : \alpha \text{ is one to one}\}$ และกึ่งกรุปการแปลงชนิดอื่นๆ อีกมากมาย นอกจากนี้บนกึ่งกรุปการแปลงชนิดต่างๆยังมีการสนใจศึกษาอันดับบางส่วนอีกชนิดหนึ่งที่น่าสนใจเรียกว่าอันดับบางส่วนการบรรจุ $\subseteq$ (containment partial order) ซึ่งนิยามโดย

$\alpha \subseteq \beta$ ก็ต่อเมื่อ $dom\alpha \subseteq dom\beta$ และ $x\alpha = x\beta$ สำหรับทุก $x \in dom\alpha$

ในปี 2003, Marques-Smith และ Sullivan [2] ศึกษาอันดับบางส่วนธรรมชาติ $\le$ และอันดับบางส่วนการบรรจุ $\subseteq$ บนกึ่งกรุปการแปลงบางส่วน $P(X)$ ในงานวิจัยนี้พวกเขายังได้แสดงว่าอันดับบางส่วนทั้งสองชนิดนี้แตกต่างกันและไม่ได้บรรจุซึ่งกันและกัน นอกจากนี้ยังศึกษาอันดับบางส่วน Ω' ซึ่งเป็นขอบเขตบนของ $\le$ และ $\subseteq$ และได้หาอันดับบางส่วน Ω ซึ่งเป็นขอบเขตบนน้อยสุดของ $\le$ และ $\subseteq$ อีกด้วย ผลลัพธ์ที่น่าสนใจอื่นๆมีดังนี้

(1) $\alpha \le \beta$ ใน $P(X)$ ก็ต่อเมื่อ $dom\alpha \subseteq dom\beta, ran\alpha \subseteq ran\beta, \alpha\beta^{-1} \subseteq \alpha\alpha^{-1}$ และ $\beta\beta^{-1} \cap (dom\beta \times dom\alpha) \subseteq \alpha\alpha^{-1}$

(2) $\alpha \subseteq \beta$ ใน $P(X)$ ก็ต่อเมื่อ $ran\alpha \subseteq ran\beta$ และ $\alpha\beta^{-1} \subseteq \beta\beta^{-1}$

(3) γ มีสมบัติเข้ากันได้ทางซ้ายภายใต้ Ω ก็ต่อเมื่อ γ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

(4) γ มีสมบัติเข้ากันได้ทางขวาภายใต้ Ω ก็ต่อเมื่อ $\gamma \in T(X)$ และ γ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือเป็นฟังก์ชันคงตัวอย่างใดอย่างหนึ่ง

นอกจากนี้สำหรับ $\alpha, \beta \in P(X)$ จะได้

1) $id_{dom\alpha} = \alpha\alpha^{-1}$ และ $id_{X\alpha} = \alpha^{-1}\alpha$

2) $\beta\beta^{-1} \cap (dom\beta \times dom\alpha) \subseteq \alpha\alpha^{-1}$

และยังพบว่า ข้อความทั้ง 3 ต่อไปนี้สมมูลกันสำหรับ $\alpha, \beta \in P(X)$

1) $\alpha \subseteq \beta$

2) $X\alpha \subseteq X\beta$ และ $\alpha\beta^{-1} = \alpha\alpha^{-1}$

3) $X\alpha \subseteq X\beta$ และ $\alpha\beta^{-1} \subseteq \beta\beta^{-1}$

ผลลัพธ์ที่สำคัญอีกประการหนึ่งคือ $\leq = \subseteq$ บน $I(X)$ ซึ่งถูกแสดงใน [5]

2.2 กึ่งกรุปการแปลงแบร์-เลวี $BL(p,q)$

ในปี ค.ศ. 1932 R. Baer และ F. Levi ได้ศึกษากึ่งกรุปการแปลงแบร์เลวี (Baer-Levi semigroup) ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$BL(p,q) = \{\alpha \in T(X) \cap I(X) : |X \setminus \operatorname{Im}\alpha| = q\}$$

ที่นิยามบนเซตอนันต์ X โดยที่ $|X| = p \geq q \geq \aleph_0$ กึ่งกรุปนี้มีสมบัติ 3 ข้อที่สำคัญคือ

1. เป็นกึ่งกรุปเชิงเดียวขวา (right simple semigroup)

2. มีสมบัติการตัดออกทางขวา (right cancellative property)

3. ไม่มีสมาชิกนิจพล (idempotent element)

ใน [1] ได้มีการแสดงว่า กึ่งกรุป S ใดๆที่เป็นกึ่งกรุปเชิงเดียวขวา มีสมบัติการตัดออกทางขวา และไม่มีสมาชิกนิจพล จะสามารถถูกฝัง (embedded) ไปยังกึ่งกรุปแบร์เลวีที่เหมาะสมได้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือกึ่งกรุปแบร์เลวีนี้ถือเป็นต้นแบบ (model) ของกึ่งกรุป S ใดๆที่มีสมบัติ 3 ข้อข้างต้น

เนื่องจากกึ่งกรุป $BL(p,q)$ นั้นเป็นกึ่งกรุปย่อยของทั้ง $I(X)$ และ $P(X)$ ดังนั้นเราสามารถใช้แนวทางการศึกษาอันดับบางส่วนธรรมชาตินี้ทั้งบน $I(X)$ และ $P(X)$ มาประยุกต์เพื่อใช้ศึกษาบน $BL(p,q)$ ได้เช่นเดียวกัน

2.3 กึ่งกรุปการแปลงบางส่วนแบร์เลวี $PS(p,q)$

กำหนดเซตอนันต์ X โดยที่ $|X| = p \geq q \geq \aleph_0$ กึ่งกรุปการแปลงบางส่วนแบร์-เลวีนิยามโดย

$$PS(p,q) = \{\alpha \in I(X) : |X \setminus X\alpha| = q\}$$

จะเห็นได้ชัดว่า $BL(p,q)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $PS(p,q)$

กึ่งกรุป $PS(p,q)$ นี้ถูกนิยามครั้งแรกใน [6] โดยพบว่า แม้ว่า $BL(p,q)$ จะเป็นกึ่งกรุปย่อยของ $PS(p,q)$ แต่ทั้งสองกึ่งกรุปกลับมีสมบัติพื้นฐานแตกต่างกันโดยสิ้นเชิง นั่นคือ

1. $PS(p,q)$ ไม่เป็นกึ่งกรุปเชิงเดียวขวา
2. $PS(p,q)$ ไม่มีสมบัติการตัดออกทางขวา
3. $PS(p,q)$ มีสมาชิกนิจพล

ใน [7] Pinto และ Sullivan ได้ศึกษาสมบัติพื้นฐานเชิงโครงสร้างบน $PS(p,q)$ เช่น ความสัมพันธ์กรีน ไอดีล และสมาชิกปรกติ เป็นต้น ต่อมา ใน [4] และ [8] Singha, Sanwong และ Sullivan ได้ศึกษาอันดับบางส่วนธรรมชาติบนกึ่งกรุปนี้ และใน [9] Singha และ Sanwong ได้อธิบายกึ่งกลุ่มย่อยใหญ่สุดใน $PS(p,q)$

สำหรับในโครงการวิจัยนี้นอกจากเราจะศึกษาอันดับบางส่วนธรรมชาติบน $BL(p,q)$ แล้ว เราจะขยายกึ่งกรุป $PS(p,q)$ ออกไป เป็น กึ่งกรุป $PS(p,q)$ นิยามโดย

$$PS(X,Y) = \{\alpha \in I(X) : |X \setminus \operatorname{Im}\alpha| = q, X\alpha \subseteq Y\}$$

เมื่อ $Y \subseteq X$ โดยจะเห็นได้ว่าในกรณีที่ $Y = X$ จะได้ $PS(X,Y) = PS(p,q)$ ส่วนในกรณี $Y \neq X$ จะได้ $PS(X,Y)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $PS(p,q)$ ซึ่งผลลัพธ์ทั้งหมดที่ได้บน $PS(X,Y)$ จะครอบคลุมผลลัพธ์ทั้งหมดบน $PS(p,q)$ ด้วย