

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

กึ่งกรุป (semigroup) คือโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ชนิดหนึ่งซึ่งประกอบด้วยเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและการดำเนินการทวิภาค (binary operation) ที่มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ (associative law) ตัวอย่างที่คุ้นเคยกันดีเช่นเซตของจำนวนเต็มกับการบวกหรือการคูณ เป็นตัวอย่างของกึ่งกรุปที่เป็นรูปธรรมและได้ใช้อยู่ในชีวิตประจำวัน การศึกษาทฤษฎีกึ่งกรุป (Semigroup theory) เป็นแขนงหนึ่งที่นิยมศึกษาทางคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ (pure Mathematics) ซึ่งมีนักวิจัยทางคณิตศาสตร์ได้ศึกษาอย่างแพร่หลาย โดยจะศึกษาบนกึ่งกรุปที่มีความเป็นนามธรรมสูงขึ้น เช่นบนกึ่งปรูปการแปลง (transformation semigroup) ชนิดต่างๆที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันโดยมีการดำเนินการทวิภาคคือการประกอบของฟังก์ชัน (composition of function) เช่น กึ่งกรุปการแปลงบางส่วน $P(X)$ (partial transformation semigroup) ที่ประกอบด้วยฟังก์ชันทั้งหมดที่ส่งจาก A ไปยัง B เมื่อ $A, B \subseteq X$ กึ่งกรุปการแปลงเต็ม (full transformation semigroup)

$$T(X) = \{\alpha \in P(X) : \text{dom } \alpha = X\}$$

กึ่งกรุปการแปลงบางส่วนหนึ่งต่อหนึ่ง (injective partial transformation semigroup)

$$I(X) = \{\alpha \in P(X) : \alpha \text{ is } 1-1\}$$

เป็นต้น

กึ่งกรุปการแปลงชนิดหนึ่งที่มีการศึกษามากมายคือกึ่งกรุปการแปลงแบร์เลวี (Baer-Levi semigroup) ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$BL(p, q) = \{\alpha \in T(X) \cap I(X) : |X \setminus \text{Im } \alpha| = q\}$$

ที่นิยามบนเซตอนันต์ X โดยที่ $|X| = p \geq q \geq \aleph_0$ กึ่งกรุปแบร์เลวีนี้ถูกศึกษาครั้งแรกในปี ค.ศ. 1932 โดย R. Baer และ F. Levi กึ่งกรุปนี้มีความสำคัญมากเนื่องจากใน [1] ได้มีการแสดงว่า กึ่งกรุป S ใดๆ ที่เป็นกึ่งกรุปเชิงเดียวขวา (right simple semigroup) มีสมบัติการตัดออกทางขวา (right cancellative property) และไม่มีสมาชิกนิพผล (idempotent element) จะสามารถถูกฝัง (embedded) ไปยังกึ่งกรุปแบร์เลวีที่เหมาะสมได้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือกึ่งกรุปแบร์เลวีนี้ถือเป็นต้นแบบ (model) ของ

กึ่งกรุป S ใดๆที่มีสมบัติ 3 ข้อข้างต้น ดังการการศึกษาสมบัติหรือโครงสร้างต่างๆบนกึ่งกรุปแบร์เลวี จะสามารถขยายผลไปสู่กึ่งกรุป S ใดๆที่มีสมบัติ 3 ข้อนั้นได้ งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับ $BL(p, q)$ มีมากมายเช่นในปี 1984 Levi และ Wood ได้แสดงวงศ์ (family) ของกึ่งกรุปย่อยใหญ่สุด (maximal subsemigroup) ของกึ่งกรุป $BL(p, q)$ ในรูปแบบหนึ่ง ซึ่งนิยามจากเซตย่อย $\emptyset \neq A \subseteq X$ และ $|X \setminus A| \geq q$ โดยได้ว่า $M_A = \{\alpha \in BL(p, q) : A \not\subseteq \text{Im } \alpha \text{ or } (A\alpha \subseteq A \text{ or } |X\alpha \setminus A| < q)\}$ เป็นกึ่งกรุปย่อยใหญ่สุดของ $BL(p, q)$

ประเด็นหนึ่งที่นิยมศึกษาอย่างแพร่หลายในการศึกษาทฤษฎีกึ่งกรุปคือการศึกษาอันดับบางส่วนธรรมชาติ (natural partial order) \leq บนกึ่งกรุปที่สนใจ โดยหาก S เป็นกึ่งกรุปใดๆแล้ว เราสามารถนิยามอันดับบางส่วนธรรมชาติบน S ได้โดย

$$a \leq b \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = xb = by \text{ และ } a = ay \text{ สำหรับบาง } x, y \in S^1 \text{ [3]}$$

ในปี 2010 Singha, Sanwong และ Sullivan [4] ได้ศึกษาอันดับบางส่วนธรรมชาตินี้บนกึ่งกรุปอีกชนิดหนึ่งที่มีความเกี่ยวข้องกับ $BL(p, q)$ เรียกว่ากึ่งกรุปการแปลงบางส่วนแบร์เลวี (partial Baer-Levi semigroup) นิยามโดย

$$PS(p, q) = \{\alpha \in I(X) : |X \setminus \text{Im } \alpha| = q\}$$

จากนิยามดังกล่าวนี้จะเห็นได้ชัดว่า $BL(p, q)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $PS(p, q)$ ในงานวิจัยนี้พวกเขาได้แสดงเงื่อนไขความสัมพันธ์ของสองสมาชิกใดๆใน $PS(p, q)$ ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาตินี้ รวมทั้งหาสมาชิกมากที่สุด (maximum element) สมาชิกน้อยสุด (minimum element) สมาชิกใหญ่สุด (maximal element) สมาชิกเล็กสุด (minimal element) หาเงื่อนไขของสมบัติการเข้ากันได้ทางซ้ายและขวา (left and right compatible) หาสมาชิกขอบเขตล่างมากที่สุด $a \wedge b$ (supremum or meet) สมาชิกขอบเขตบนน้อยสุด $a \vee b$ (infimum or join) ของสองสมาชิก a, b ใดๆบนกึ่งกรุป $PS(p, q)$ รวมทั้งยังศึกษาอันดับบางส่วนอีกชนิดหนึ่งบน $PS(p, q)$ เรียกว่า อันดับบางส่วนการบรรจุ (containment partial order) นิยามโดย

$$\alpha \subseteq \beta \text{ ก็ต่อเมื่อ } \text{dom } \alpha \subseteq \text{dom } \beta \text{ และ } x\alpha = x\beta \text{ สำหรับทุก } x \in \text{dom } \alpha$$

สุดท้ายพวกเขาได้เปรียบเทียบอันดับบางส่วน \leq และ \subseteq และเปรียบเทียบผลที่ได้กับงานวิจัยก่อนหน้านี้ที่ได้อันดับบางส่วนธรรมชาติบนกึ่งกรุปการแปลง $P(X), T(X)$ และ $I(X)$ ([1]) ให้เห็นความแตกต่างของผลลัพธ์ที่ได้

ในงานวิจัยนี้ เราจะใช้ผลจากการศึกษาอันดับบางส่วนธรรมชาติบนกึ่งกรุปการแปลงหลายๆ ชนิดเช่น $P(X), T(X), I(X)$ และ $PS(p, q)$ เพื่อศึกษาอันดับบางส่วนธรรมชาติบนกึ่งกรุปการแปลง $BL(p, q)$ นอกจากนี้ เราจะศึกษาอันดับบางส่วนธรรมชาติบนกึ่งกรุปที่เป็นนัยทั่วไป (generalization) ของกึ่งกรุป $PS(p, q)$ นิยามโดย

$$PS(X, Y) = \{\alpha \in I(X) : |X \setminus \text{Im } \alpha| = q, X\alpha \subseteq Y\}$$

เมื่อ $Y \subseteq X$ โดยจะเห็นได้ว่าในกรณีที่ $Y = X$ จะได้ $PS(X, Y) = PS(p, q)$ ส่วนในกรณี $Y \neq X$ จะได้ $PS(X, Y)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $PS(p, q)$

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

- 1.หารูปแบบความสัมพันธ์ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติของสองสมาชิกใดๆ ในกึ่งกรุป $BL(p, q)$
2. หาสมาชิกมากที่สุด (maximum element) สมาชิกน้อยสุด (minimum element) สมาชิกใหญ่สุด (maximal element) สมาชิกเล็กสุด (minimal element) ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติบนกึ่งกรุป $BL(p, q)$
3. หาเงื่อนไขของสมบัติการเข้ากันได้ทางซ้ายและขวา (left and right compatible) ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติบนกึ่งกรุป $BL(p, q)$
4. หาสมาชิกขอบเขตล่างมากที่สุด $a \wedge b$ (supremum or meet) สมาชิกขอบเขตบนน้อยสุด $a \vee b$ (infimum or join) ของสองสมาชิก a, b ใดๆ บนกึ่งกรุป $BL(p, q)$ ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติ
5. หาสมาชิกปกคลุมบน (upper cover) และสมาชิกปกคลุมล่าง (lower cover) ของแต่ละสมาชิกใน $BL(p, q)$
- 6.หารูปแบบความสัมพันธ์ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติของสองสมาชิกใดๆ ในกึ่งกรุป $PS(X, Y)$
7. หาสมาชิกมากที่สุด (maximum element) สมาชิกน้อยสุด (minimum element) สมาชิกใหญ่สุด (maximal element) สมาชิกเล็กสุด (minimal element) ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติบนกึ่งกรุป $PS(X, Y)$

8. หาเงื่อนไขของสมบัติการเข้ากันได้ทางซ้ายและขวา (left and right compatible) ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติบนกึ่งกรุป $PS(X, Y)$

9. หาสมาชิกขอบเขตล่างมากที่สุด $a \wedge b$ (supremum or meet) สมาชิกขอบเขตบนน้อยสุด $a \vee b$ (infimum or join) ของสองสมาชิก a, b ใดๆบนกึ่งกรุป $PS(X, Y)$ ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติ

10. หาสมาชิกปกคลุมบน (upper cover) และสมาชิกปกคลุมล่าง (lower cover) ของแต่ละสมาชิกใน $PS(X, Y)$

1.3 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

1. ได้รูปแบบความสัมพันธ์ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติของสองสมาชิกใด ๆ ในกึ่งกรุป $BL(p, q)$ และ $PS(X, Y)$

2. ได้เงื่อนไขการมีสมาชิกมากที่สุด (maximum element) สมาชิกน้อยสุด (minimum element) สมาชิกใหญ่สุด (maximal element) สมาชิกเล็กสุด (minimal element) ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติบนกึ่งกรุป $BL(p, q)$ และ $PS(X, Y)$

3. ได้เงื่อนไขของสมบัติการเข้ากันได้ทางซ้ายและขวา (left and right compatible) ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติบนกึ่งกรุป $BL(p, q)$ และ $PS(X, Y)$

4. ได้เงื่อนไขการมีสมาชิกขอบเขตล่างมากที่สุด (supremum or meet) สมาชิกขอบเขตบนน้อยสุด (infimum or join) ของสองสมาชิกใด ๆ บนกึ่งกรุป $BL(p, q)$ และ $PS(X, Y)$ ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติ

5. ได้เงื่อนไขการมีสมาชิกปกคลุมบน (upper cover) และสมาชิกปกคลุมล่าง (lower cover) ของแต่ละสมาชิกใน $BL(p, q)$ และ $PS(X, Y)$

1.4 ขอบเขตของโครงการวิจัย

ศึกษาอันดับบางส่วนธรรมชาติเฉพาะบน กึ่งกรุป $BL(p, q)$ และ $PS(X, Y)$ ในกรณีที่ $|X| = p \geq q \geq \aleph_0$ และ $Y \subseteq X$