

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ในบทนี้ เราได้นิยามและศึกษาการส่งหลายค่าแบบหดตัวและได้องค์ความรู้ใหม่เป็นทฤษฎีบทการมีจุดตรึงสำหรับการส่งดังกล่าวบนปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ที่ประกอบด้วยกราฟ นอกจากนี้ชี้ให้เห็นถึงความสำคัญของทฤษฎีบทที่สามารถยืนยันการมีจุดตรึงของทฤษฎีบทที่มีมาอยู่แล้วได้และมีการยกตัวอย่างประกอบเพื่อยืนยันการใช้งานของทฤษฎีบทข้างต้น

4.1 การส่งหดตัวที่ประกอบด้วยกราฟ

ในหัวข้อนี้ เรานิยามการส่งหลายค่าแบบหดตัวบนปริภูมิเมตริกที่ประกอบด้วยกราฟดังนี้

บทนิยาม 4.1. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกและ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟมีทิศทางโดยที่ $V(G) = X$ และ $T : X \rightarrow CB(X)$. จะกล่าวว่า T เป็น การส่งหดตัวทั่วไปแบบ G ก็ต่อเมื่อ

1. มี MT -ฟังก์ชัน $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ and $L \geq 0$ ที่ทำให้

$$\min\{H(Tx, Ty), d(y, Ty)\} \leq \alpha(d(x, y))d(x, y) + LD(y, Tx)$$

สำหรับทุก $x, y \in X$ โดยที่ $(x, y) \in E(G)$,

2. ถ้า $u \in Tx$ และ $v \in Ty$ โดยที่ $d(u, v) \leq d(x, y)$ แล้ว $(u, v) \in E(G)$.

ข้อสังเกต 4.2.

1. เซตของการส่งหลายค่าหดตัวแบบ (α, L) เป็นเซตย่อยของเซตของการส่งหดตัวทั่วไปแบบ G เมื่อเรากำหนดให้ $E(G) = X \times X$.
2. เซตของการส่งหดตัวแบบทั่วไปจากทฤษฎีบท 2.8 เป็นเซตย่อยของเซตของการส่งหดตัวทั่วไปแบบ G เมื่อเรากำหนดให้ $E(G) = X \times X$ และ $L = 0$

4.2 ทฤษฎีบทการมีจุดตรึง

ในหัวข้อนี้เรานำเสนอทฤษฎีบทการมีจุดตรึงของการส่งหลายค่าที่มีคุณสมบัติตามบทนิยาม 4.1 ภายใต้เงื่อนไขที่เพียงพอบนปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ที่ประกอบด้วยกราฟ

ทฤษฎีบท 4.3. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์, $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟมีทิศทางโดยที่ $V(G) = X$ และ X มีคุณสมบัติ A และให้ $T : X \rightarrow CB(X)$ เป็นการส่งหดตัวทั่วไปแบบ G สมมุติให้มี $x_0 \in X$ โดยที่ $(x_0, y) \in E(G)$ สำหรับบางค่า $y \in Tx_0$ แล้วจะมี $v \in X$ ที่ทำให้ $v \in Tv$.

พิสูจน์. นิยามฟังก์ชัน $\mu : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ ดังนี้

$$\mu(t) = \frac{1 + \varphi(t)}{2} \quad \text{for all } t \in [0, \infty).$$

จะได้ว่า $0 \leq \varphi(t) < \mu(t) < 1$ สำหรับทุก $t \in [0, \infty)$ เนื่องจากมี $x_0 \in X$ ที่ทำให้ $(x_0, x_1) \in E(G)$ สำหรับบางค่า $x_1 \in Tx_0$ ทำให้ได้ว่า

$$\min\{H(Tx_0, Tx_1), d(x_1, Tx_1)\} \leq \alpha(d(x_0, x_1))d(x_0, x_1) + LD(x_1, Tx_0). \quad (4.1)$$

เนื่องจาก

$$d(x_1, Tx_1) \leq \sup_{u \in Tx_0} d(u, Tx_1) \leq H(Tx_0, Tx_1),$$

จะได้ว่า

$$\min\{H(Tx_0, Tx_1), d(x_1, Tx_1)\} = d(x_1, Tx_1) \quad (4.2)$$

ดังนั้นจาก (4.1) และ (4.2) จะได้ว่า

$$d(x_1, Tx_1) < \mu(d(x_0, x_1))d(x_0, x_1) \quad (4.3)$$

และเนื่องจาก (4.3) จะมี $x_2 \in Tx_1$ ที่ทำให้

$$d(x_1, x_2) < \mu(d(x_0, x_1))d(x_0, x_1) < d(x_0, x_1)$$

ดังนั้น $(x_1, x_2) \in E(G)$ พิจารณา ถ้า $x_2 = x_1$ แล้ว $x_1 \in Tx_1$ ซึ่งจะทำให้เราได้ว่า x_1 เป็นจุดตรึงของ T ถ้า $x_2 \neq x_1$ เนื่องจาก T เป็นการส่งหดตัวทั่วไปแบบ G นั่นคือ

$$\begin{aligned} d(x_2, Tx_2) &= \min\{H(Tx_1, Tx_2), d(x_2, Tx_2)\} \\ &< \mu(d(x_1, x_2))d(x_1, x_2) + Ld(x_2, Tx_1) \\ &= \mu(d(x_1, x_2))d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

ดังนั้นจะมี $x_3 \in Tx_2$ ที่ทำให้

$$d(x_2, x_3) < \mu(d(x_1, x_2))d(x_1, x_2) < d(x_1, x_2).$$

ทำให้ได้ว่า $(x_2, x_3) \in E(G)$ ดังนั้นจากการทำซ้ำไปอย่างมีขั้นตอน จะได้ว่ามีลำดับ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ที่สอดคล้องคุณสมบัติต่อไปนี้ สำหรับแต่ละค่า $n \in \mathbb{N}$

- (i) $x_n \in Tx_{n-1}$ with $x_n \neq x_{n-1}$;
- (ii) $d(x_n, x_{n+1}) < \mu(d(x_{n-1}, x_n))d(x_{n-1}, x_n) < d(x_{n-1}, x_n)$;
- (iii) $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$.

จากข้อ (ii) ทำให้ได้ว่า $\{d(x_n, x_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ เป็นลำดับลดลงในช่วง $[0, \infty)$ เนื่องจาก φ เป็น MT -ฟังก์ชัน เราจะได้ว่า

$$0 \leq \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \varphi(d(x_n, x_{n+1})) < 1$$

นั่นคือ

$$0 < \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mu(d(x_n, x_{n+1})) = \frac{1}{2} \left[1 + \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \varphi(d(x_n, x_{n+1})) \right] < 1$$

เรากำหนดให้ $\gamma := \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mu(d(x_n, x_{n+1}))$ ดังนั้น $\gamma \in [0, 1)$
พิจารณาสำหรับแต่ละค่า $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จากข้อ (ii) จะได้ว่า

$$d(x_n, x_{n+1}) < \mu(d(x_{n-1}, x_n))d(x_{n-1}, x_n) \leq \gamma d(x_{n-1}, x_n) \quad (4.4)$$

ดังนั้นผลที่ตามมาจากข้อ (4.4) จะได้ว่า

$$d(x_n, x_{n+1}) < \gamma d(x_{n-1}, x_n) < \cdots < \gamma^n d(x_0, x_1). \quad (4.5)$$

ต่อมากำหนดให้ $\xi_n = \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x_0, x_1)$ ดังนั้นสำหรับแต่ละค่า $m, n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $m > n$ และจาก (4.5) ทำให้ได้ว่า

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) < \xi_n$$

เนื่องจาก $0 < \gamma < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$, นั่นคือ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{d(x_m, x_n) : m > n\} = 0.$$

เพราะฉะนั้นสรุปได้ว่า $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับโคซีใน X เนื่องจาก (X, d) เป็นเมตริกบริบูรณ์ ดังนั้นจะมี $v \in X$ ที่ทำให้ $x_n \rightarrow v$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ เนื่องจาก X มีคุณสมบัติ A จะได้ว่า $(x_n, v) \in E(G)$ สำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$\min\{H(Tx_n, Tv), d(v, Tv)\} \leq \varphi(d(x_n, v))d(x_n, v) + Ld(v, Tx_n) \quad \text{สำหรับทุกค่า } n \in \mathbb{N} \quad (4.6)$$

ต่อมากำหนดให้

$$\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : \min\{H(Tx_n, Tv), d(v, Tv)\} = H(Tx_n, Tv)\}.$$

เราสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 สมมติให้ $\#(\mathcal{A}) = \infty$ โดยที่ $\#(\mathcal{A})$ เป็นจำนวนสมาชิกของ $\mathcal{A}$ ดังนั้นจะมี $\{n_k\} \subset \mathcal{A}$ ที่ทำให้

$$\min\{H(Tx_{n_k}, Tv), d(v, Tv)\} = H(Tx_{n_k}, Tv) \quad \text{สำหรับทุกค่า } k \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

เนื่องจาก $(x_{n_k}, v) \in E(G)$ สำหรับทุกค่า $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} d(v, Tv) &\leq d(v, x_{n_k+1}) + d(x_{n_k+1}, Tv) \\ &\leq d(v, x_{n_k+1}) + H(Tx_{n_k}, Tv) \\ &= d(v, x_{n_k+1}) + \min\{H(Tx_{n_k}, Tv), d(v, Tv)\} \\ &\leq d(v, x_{n_k+1}) + \varphi(d(x_{n_k}, v))d(x_{n_k}, v) + Ld(v, Tx_{n_k}) \\ &< d(v, x_{n_k+1}) + d(x_{n_k}, v) + Ld(v, x_{n_k+1}) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $x_{n_k} \rightarrow v$ เมื่อ $k \rightarrow \infty$ เป็นผลให้ $d(v, Tv) = 0$ และเนื่องจาก $Tv \in CB(X)$ เราสรุปได้ว่า $v \in Tv$ นั่นคือ v เป็นจุดตรึงของ T

กรณีที่ 2 สมมติให้ $\#(\mathcal{A}) < \infty$ ทำให้ได้ว่าจะมีลำดับของจำนวนนับ $\{n_k\}$ ที่ทำให้

$$\min\{H(x_{n_k}, Tv), d(v, Tv)\} = d(v, Tv) \quad \text{สำหรับทุกค่า } k \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

เนื่องจาก $(x_{n_k}, v) \in E(G)$ สำหรับทุกค่า $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} d(v, Tv) &= \min\{H(x_{n_k}, Tv), d(v, Tv)\} \\ &\leq \varphi(d(x_{n_k}, v))d(x_{n_k}, v) + Ld(v, Tx_{n_k}) \\ &< d(x_{n_k}, v) + Ld(v, x_{n_k+1}). \end{aligned}$$

เนื่องจาก $x_n \rightarrow v$ เมื่อ $k \rightarrow \infty$ เป็นผลให้ $d(v, Tv) = 0$ และเนื่องจาก $Tv \in CB(X)$ เราสรุปได้ว่า $v \in Tv$ นั่นคือ v เป็นจุดตรึงของ T จบการพิสูจน์ $\square$

ข้อสังเกต 4.4. ทฤษฎีบท 4.3 ปรับปรุงและพัฒนาผลลัพธ์ต่างๆ ดังนี้

- (a) ถ้าเรากำหนดให้ $E(G) = X \times X$ และ $L = 0$ ในทฤษฎีบท 4.3 แล้วเราจะได้ผลลัพธ์ทฤษฎีบทของ Mizoguchi-Takahashi [16]
- (b) ถ้าเรากำหนดให้ $E(G) = X \times X$ ในทฤษฎีบท 4.3 แล้วเราจะได้ผลลัพธ์ทฤษฎีบทของ Berinde [7].
- (c) ถ้าเรากำหนดให้ $CB(X) = \{\{x\} : x \in X\}$, $\varphi(t) = k$ โดยที่ $0 \leq k < 1$ และ $L = 0$ ในทฤษฎีบท 4.3 แล้วเราจะได้ผลลัพธ์ทฤษฎีบทของ Jachymski [14]

ในส่วนนี้ เราได้ยกตัวอย่างซึ่งสนับสนุนทฤษฎีบท 4.3 โดยที่ทฤษฎีบทของ Mizoguchi-Takahashi ไม่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้ ซึ่งจะเป็นการแสดงให้เห็นว่าทฤษฎีบท 4.3 นี้เป็นองค์ความรู้ใหม่และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการส่งหลายค่าที่กว้างขึ้น

ตัวอย่าง 4.5. กำหนดให้ l^∞ เซตที่ประกอบไปด้วยลำดับที่มีขอบเขตภายใต้ได้นอร์ม d_∞ และให้ $\{\tau_n\} \in l^\infty$ ที่นิยามโดย $\tau_n = \frac{1}{n}$ สำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ และกำหนดให้ $\{e_n\}$ เป็นฐานของ l^∞ กำหนดให้ $v_n = \tau_n e_n$ สำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ และให้ $X = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ดังนั้น (X, d_∞) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ และ $d_\infty(v_n, v_m) = \frac{1}{n}$ สำหรับ $m > n$ กำหนดให้ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟมีทิศทางโดยที่ $V(G) = X$ และ

$$E(G) = \{(v_n, v_m) \in X \times X : m \geq n\}.$$

จะได้ว่า X มีคุณสมบัติ A นอกจากนี้เราให้ $T : X \rightarrow CB(X)$ เป็นการส่งหลายค่าที่นิยามโดย

$$Tv_n = \begin{cases} \{v_1, v_2\} & \text{เมื่อ } n \in \{1, 2\}, \\ X \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\} & \text{เมื่อ } n \geq 3. \end{cases}$$

นิยามฟังก์ชัน $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ ดังนี้

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\tau_{n+2}}{\tau_n} & \text{เมื่อ } t = \tau_n \text{ สำหรับบางค่า } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{สำหรับกรณีอื่น.} \end{cases}$$

จะได้ว่า $\limsup_{s \rightarrow t+} \varphi(s) = 0 < 1$ สำหรับทุกค่า $t \in [0, \infty)$ นั่นคือ φ เป็น MT -ฟังก์ชัน ต่อไปเราจะแสดงว่า T เป็นการส่งหดตัวทั่วไปแบบ G , กำหนดให้ $x, y \in X$ โดยที่ $(x, y) \in E(G)$ เราแบ่งการพิจารณาเป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณี 1: Let $x = v_1, y = v_2$. Then $Tv_1 = Tv_2 = \{v_1, v_2\}$ นอกจากนี้ทำให้ได้ว่า

$$\min\{H(Tv_1, Tv_2), d(v_2, Tv_2)\} = 0 < \tau_3 = \varphi(d(v_1, v_2))d(v_1, v_2).$$

กรณี 2: ถ้า $x = v_1, y = v_m$ สำหรับแต่ละ $m \geq 3$ แล้ว $Tv_1 = \{v_1, v_2\}$ และ $Tv_m = \{v_{m+2}, v_{m+3}, \dots\}$ นอกจากนี้ทำให้ได้ว่า

$$\min\{H(Tv_1, Tv_m), d(v_m, Tv_m)\} = \tau_m \leq \varphi(d(v_1, v_m))d(v_1, v_m) + 2d(v_m, Tv_1).$$

กรณี 3: ถ้า $x = v_2, y = v_m$ สำหรับแต่ละ $m \geq 3$ แล้ว $Tv_2 = \{v_1, v_2\}$ และ $Tv_m = \{v_{m+2}, v_{m+3}, \dots\}$ นอกจากนี้ทำให้ได้ว่า

$$\min\{H(Tv_2, Tv_m), d(v_m, Tv_m)\} = \tau_m \leq \varphi(d(v_2, v_m))d(v_2, v_m) + 2d(v_m, Tv_2).$$

กรณี 4: ถ้า $x = v_n, y = v_m$ สำหรับแต่ละ $n \geq 3$ และ $m > n$ แล้ว $Tv_n = \{v_{n+2}, v_{n+3}, \dots\}$ and $Tv_m = \{v_{m+2}, v_{m+3}, \dots\}$ นอกจากนี้ทำให้ได้ว่า

$$\min\{H(Tv_n, Tv_m), d(v_m, Tv_m)\} = \tau_{n+2} = \varphi(d(v_n, v_m))d(v_n, v_m) + 2d(v_m, Tv_n).$$

ดังนั้นจากการพิจารณาทั้ง 4 กรณี ทำให้เราสรุปได้ว่า T เป็นการส่งหัดตัวทั่วไปแบบ G โดยที่ φ นิยามข้างต้นและ $L = 2$ ต่อมาเลือก $v_1 \in X$ ทำให้ได้ว่า $(v_1, v_2) \in E(G)$ โดยที่ $v_2 \in Tv_1 = \{v_1, v_2\}$ เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่าตัวอย่างนี้สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดของสมการ 4.3 นอกจากนี้จะเห็นว่าการส่งหลายค่าของตัวอย่างนี้มีจุดตรึงคือ 1 และ 2 นอกจากนั้น เราจะสังเกตว่า

$$H(Tv_n, Tv_m) = \tau_1 > \tau_3 = \varphi(d(v_1, v_m))d(v_1, v_m) \quad \text{สำหรับทุกค่า } m \geq 3,$$

ซึ่งจากสมการข้างต้นนี้ทำให้เราไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทของ Mizoguchi-Takahashi [16] มาประยุกต์ได้ แต่ทฤษฎีบท 4.3 สามารถประยุกต์ได้