

บทที่ 2

แนวคิดทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เป็นการศึกษารวบรวมหลักการทฤษฎี แนวคิดและผลการศึกษาที่ผ่านมาของทฤษฎีบทการมีจุดตรึงของการส่งแบบหดตัวในแต่ละประเภทในปริภูมิเมตริก จากบทความและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $x, y \in X$ และ $A, B, C \in CB(X)$ แล้วคุณสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$,
2. $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, B) + \sup_{b \in B} d(b, A)$,
3. ถ้า $x \in A$ แล้ว $d(x, B) \leq H(A, B)$.

ทฤษฎีบท 2.1 ([15]). กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก แล้ว H เป็นเมตริกบน $CB(X)$

ทฤษฎีบท 2.2 ([15]). กำหนดให้ A เป็นเซตปิดในปริภูมิเมตริก (X, d) แล้ว

$$x \in A \text{ ก็ต่อเมื่อ } d(x, A) = 0$$

บทตั้ง 2.3 ([15]). กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก ถ้า $A, B \in CB(X)$ และ $a \in A$, แล้ว สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ จะมี $b \in B$ ที่ทำให้

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \epsilon$$

ในปี 1969, Nadler [15] เป็นผู้ริเริ่มศึกษาทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าบนปริภูมิเมตริก

ทฤษฎีบท 2.4 ([15]). กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกและ T เป็นการส่งหลายค่าจาก X ไปยัง $CB(X)$ สมมติให้มี $k \in [0, 1)$ โดยที่

$$H(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \quad \text{สำหรับ } x, y \in X.$$

แล้วจะมี $z \in X$ ที่ทำให้ $z \in Tz$.

ทฤษฎีบท 2.4 ได้รับการศึกษาต่ออย่างแพร่หลายและกว้างขวางโดยการศึกษาไปถึงการส่งหลายค่าที่กว้างมากยิ่งขึ้น ([4],[7],[8],[10],[20]).

บทนิยาม 2.5 ([16]). กำหนดให้ $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ จะกล่าวว่า φ เป็น $\mathcal{MT}$ -ฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{r \rightarrow t^+} \sup \varphi(r) < 1 \quad \text{สำหรับ } t \in (0, \infty)$$

ในปี ค.ศ. 1989 Mizoguchi และ Takahashi [16] ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการมีจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าดังนี้.

ทฤษฎีบท 2.6 ([16]). กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์และ $T : X \rightarrow CB(X)$ และให้มี MT -ฟังก์ชัน $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ โดยที่

$$H(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))d(x, y), \text{ สำหรับทุก } x, y \in X.$$

แล้ว จะมี $z \in X$ ที่ทำให้ $z \in Tz$.

ในปี ค.ศ. 2007 Berinde and Berinde [7] ได้นิยามการส่งหลายค่าซึ่งมีความทั่วไปกว่า MT -ฟังก์ชัน

บทนิยาม 2.7 ([7]). กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกและ $T : X \rightarrow CB(X)$ a เป็นการส่งหลายค่า จะกล่าวว่า T เป็น การหดตัวแบบ (φ, L) ถ้ามี $L \geq 0$ และ MT -ฟังก์ชัน $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ โดยที่

$$H(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))d(x, y) + Ld(y, Tx), \text{ สำหรับทุก } x, y \in X.$$

นอกจากนี้ Berinde and Berinde [7] ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการมีจุดตรึงของการส่งหดตัวแบบ (φ, L) ในปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ ซึ่งกล่าวได้ว่าการส่งดังกล่าวมีความทั่วไปกว่าการส่งแบบหดตัวและการส่งนี้ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งในภายหลังการส่งดังกล่าวได้ถูกศึกษาและพัฒนาต่อมาอย่างแพร่หลาย ([6],[11],[12],[17],[18],[21])

ต่อมาในภายหลัง Du and Hung [11] ได้ขยายแนวคิดทฤษฎีบทของ Mizoguchi-Takashi ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.8 ([11]). กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์และ $T : X \rightarrow CB(X)$ เป็นการส่งหลายค่า กำหนดให้มี MT -ฟังก์ชัน φ โดยที่

$$\min\{H(Tx, Ty), d(y, Ty)\} \leq \varphi(d(x, y))d(x, y)$$

สำหรับทุก $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$. แล้ว จะมี $z \in X$ ที่ทำให้ $z \in Tz$.

ในปี ค.ศ. 2008, Jachymski [14] ได้รวมแนวทางการศึกษา 2 ทางเข้าไว้ด้วยกันนั่นคือทฤษฎีบทจุดตรึงและทฤษฎีกราฟ โดยได้ศึกษาการมีจุดตรึงสำหรับการส่งบนปริภูมิเมตริกที่ประกอบด้วยกราฟดังนี้

บทนิยาม 2.9 ([14]). กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกและ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟมีทิศทาง โดยที่ $V(G) = X$ และ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq E(G)$ กำหนดให้ $f : X \rightarrow X$ จะกล่าวว่า f เป็นการส่งหดตัวแบบ G ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x และ y ใน X

$$x, y \in X, (x, y) \in E(G) \implies (f(x), f(y)) \in E(G)$$

และมี $\alpha \in [0, 1)$ โดยที่สำหรับทุก $x, y \in X$,

$$(x, y) \in E(G) \implies d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

ทฤษฎีบท 2.10 ([14]). กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์และ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟมีทิศทาง โดยที่ $V(G) = X$ และ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq E(G)$, ให้ X มีคุณสมบัติ A และให้ $f : X \rightarrow X$ be เป็นการส่งหดตัวแบบ G และให้ $X_f = \{x \in X : (x, f(x)) \in E(G)\}$. แล้ว $F(T) \neq \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $X_f \neq \emptyset$.

ทฤษฎีบทได้รับการพัฒนาต่อยอดและศึกษาอย่างแพร่หลายทั้งในลักษณะของการศึกษาการส่งที่มีความทั่วไปยิ่งขึ้นโดยที่มีคุณลักษณะของกราฟเข้ามาเกี่ยวข้อง ([1],[2],[4],[5],[9],[10],[13],[20],[19])