บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาโครงการวิจัย

ทฤษฎีบทจุดตรึงเป็นแขนงหนึ่งที่อยู่ในสาขาเรื่องการวิเคราะห์เชิงเส้น ซึ่งเป็นสาขาที่มีการนำไปประยุกต์ใช้อย่างแพร่หลายโดยเฉพาะอย่างยิ่งการศึกษาเกี่ยวกับการมีคำตอบของระบบสมการอนุพันธ์ต่างๆ การยืนยันการมีคำตอบเดียวของระบบสมการอนุพันธ์ต่างๆ ซึ่งปัญหาการยืนยันการมีคำตอบดังกล่าวเป็นปัญหาสำคัญที่มีประโยชน์ในสาขาวิชาต่าง ๆ เช่น สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ เศรษฐศาสตร์ ฟิสิกส์และวิศวกรรม

ให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ และ $T : X \to X$ เป็นการส่งค่าเดียวใด ๆ เราจะกล่าวว่า การส่ง T มีจุดตรึงถ้ามี $x \in X$ ที่ทำให้ $Tx = x$ เราจะเรียกการส่งค่าเดียวว่าเป็นการส่ง หดตัว (contraction) เมื่อมีค่าคงที่ k ที่ทำให้ $d(Tx,Ty) \leq d(x,y)$ สำหรับ $x,y \in X$ ในปี ค.ศ. 1922 Banach [3] ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทจุดตรึงที่มีชื่อเสียงเรียกว่า ทฤษฎีบทหลักการหดตัวของบานาค (Banach contraction principle) โดยกล่าวว่าสำหรับการส่งแบบหดตัวใด ๆ บนปริภูมิเมตริกจะมีจุดตรึงเสมอ

ให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ $CB(X)$ แทนวงศ์ของเซตย่อยปิดที่มีขอบเขตและไม่เป็นเซตว่างของ X และ $K(X)$ แทนวงศ์ของเซตย่อยกระชับที่ไม่เป็นเซตว่างของ X และ $T : X \to CB(X)$ เป็นการส่งหลายค่าใด ๆ เราจะกล่าวว่า การส่ง T มีจุดตรึงถ้ามี $x \in X$ ที่ทำให้ $x \in Tx$ สำหรับ $A,B \in CB(X)$, $H(A,B) = \max\{\sup_{b\in B} d(b,A), \sup_{b\in B} d(a,B)\}$ โดยที่ $d(a,B)$ คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด a ไปยังเซต B แล้วการส่ง H จะถูกเรียกว่า เมตริกเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff metric) ที่เกิดจากเมตริก d เราจะเรียกการส่งหลายค่าว่าเป็นการส่ง หดตัว (contraction) เมื่อมีค่าคงที่ k ที่ทำให้ $H(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$ สำหรับ $x,y \in X$ ซึ่งในปี ค.ศ. 1969 Nadler [15] ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหดตัวข้างต้นบนปริภูมิเมตริก ต่อมาในปี ค.ศ. 1989 Mizoguchi และ Takahashi [16] ได้ขยายแนวคิดของ Nadler โดยนิยามการส่งหลายค่าที่ทั่วไปกว่าคือ $H(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y))d(x,y)$ สำหรับ $x,y \in X$ โดยที่ $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ มีสมบัติว่า $\lim_{r\to t^+} \varphi(r) < 1$ สำหรับแต่ละ $t \in (0,\infty)$ และได้พิสูจน์ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งข้างต้นนี้บนปริภูมิเมตริก

นิยามกราฟ G ว่าเป็นคู่อันดับโดยที่ $V(G)$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่างของสมาชิกที่ เรียกว่า จุดยอด (vertex) และ $E(G)$ เป็นวงศ์จำกัดของคู่ไม่อันดับของสมาชิกใน $V(G)$ ซึ่งเรียกสมาชิกของ $E(G)$ ว่า เส้นเชื่อม (edge) พิจารณากราฟระบุทิศทางหรือไดกราฟ (digraph) G บนเส้นเชื่อมของกราฟจะระบุทิศทางโดยการใช้ หัวลูกศร ซึ่งเซตของจุดยอดของมันเกิดขึ้นพร้อมกับ X นั่นคือ $V(G) = X$ และ เซตของเส้นเชื่อม มี เราจะสมมติให้กราฟ G ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และกราฟถ่วงน้ำหนัก (weighted graph) โดยกำหนดค่าน้ำหนักแต่ละเส้นเชื่อมตามระยะทางระหว่างจุดยอดของกราฟ เราใช้สัญลักษณ์ G^{-1} แทน การแปลงผัน (conversion) ของกราฟ โดยการเปลี่ยนทิศทางตรงข้ามของเส้นใน

กราฟ และใช้สัญลักษณ์ $\overline{G}$ แทน กราฟไม่ระบุทิศทางที่ได้จากกราฟ G โดยการละเว้นทิศทางบนเส้นเชื่อมของกราฟ G เราจะพิจารณา ไดกราฟ G ที่เซตของเส้นเชื่อมสมมาตร (symmetric) นั่นคือ $\overline{G} = G \cup G^{-1}$ ในปี ค.ศ. 2008 Jachymski [14] นำเอาทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่ามาประยุกต์เชื่อมโยงกับสาขาทฤษฎีกราฟ โดยได้นิยามการส่งแบบใหม่ที่เรียกว่า หดตัว G (G-contractions) ถ้ามีค่าคงที่ k ที่ทำให้ $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ สำหรับทุกๆ $x, y \in X$ ซึ่ง $(x, y) \in E(G)$ และได้พิสูจน์ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งหดตัว G บนปริภูมิเมตริกที่ประกอบด้วยกราฟ ซึ่งถ้าเราสมมติให้กราฟ G ซึ่งมี $E(G) = X \times X$ แล้วจะเห็นได้ชัดว่า กราฟ G จะเป็นกราฟ เชื่อมโยง และทฤษฎีบทดังกล่าวจะกลายมาเป็นทฤษฎีบทหลักการหดตัวของบานาค

ในงานวิจัยนี้เราจะศึกษาการส่งแบบหลายค่าบนปริภูมิเมตริกและบนปริภูมิบานาคที่ประกอบด้วยกราฟ และหาเงื่อนไขเพียงพอที่จะยืนยันการมีจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่านี้

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. ศึกษาคุณสมบัติของการส่งหลายค่าและหาเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะทำให้การส่งหลายค่ามีจุดตรึงในปริภูมิเมตริกที่ประกอบด้วยกราฟซึ่งจะเกิดเป็นทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่
2. นำทฤษฎีที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในการยืนยันการมีคำตอบของสมการต่างๆ

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

ศึกษาการมีจุดตรึงของการส่งหลายค่าบนปริภูมิเมตริก (metric spaces) ที่ประกอบด้วยกราฟ

1.4 นิยามศัพท์เฉพาะ

บทนิยาม 1.1. กำหนดให้ X ไม่เป็นเซตว่างและ $d : X \times X \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน แล้วจะกล่าวว่า d เป็น *เมตริก (metric)* บน X ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x, y และ z ทุกตัวของ X สอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

(1) $d(x, y) \geq 0$, นอกจากนี้ $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

เรียกคู่อันดับ (X, d) ว่า *ปริภูมิเมตริก (metric space).*

สำหรับ $r > 0$ และสมาชิก x ในปริภูมิเมตริก (X, d) เรานิยาม

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

บทนิยาม 1.2. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก เซต $G \subset X$ เรียกว่า *เซตเปิด (open set)* ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $x \in G$ มี $r > 0$ ที่ทำให้ $B_r(x) \subset G$.

บทนิยาม 1.3. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก เซต $F \subset X$ เรียกว่า *เซตปิด(closed set)* ก็ต่อเมื่อ $X \setminus F$ เป็นเซตเปิด

บทนิยาม 1.4. กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก เซต $F \subset X$ เรียกว่า *เซตมีขอบเขต (bounded set)* ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก M ที่มำให้ $d(x,y) \leq M$ สำหรับ $x,y \in X$.

บทนิยาม 1.5. กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน X จะกล่าวว่า $\{x_n\}$ เป็น *ลำดับลู่เข้า (convergence sequence)* ก็ต่อเมื่อ มี $x \in X$ ที่ทำให้ สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ มี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $d(x_n,x) < \epsilon$ สำหรับทุกค่า $n \geq N$

บทนิยาม 1.6. กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิเมตริก (X,d) เรียก $\{x_n\}$ ว่า *ลำดับโคชี (Cauchy sequence)* ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ มี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $d(x_m,x_n) < \epsilon$ สำหรับทุกค่า $m,n \geq N$.

บทนิยาม 1.7. กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก เรียก (X,d) ว่า *ปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ (complete metric space)* ก็ต่อเมื่อ ทุกลำดับโคชีใน X เป็นลำดับลู่เข้าใน X

สำหรับ $A,B \in CB(X)$ เรานิยามฟังก์ชัน $H : CB(X) \times CB(X) \to \mathbb{R}^+$ ดังนี้

$$H(A,B) = \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\},$$

โดยที่

$$\delta(A,B) = \sup\{d(a,B) : a \in A\},$$

$$\delta(B,A) = \sup\{d(b,A) : b \in B\},$$

$$d(a,C) = \inf\{\|a-x\| : x \in C\}.$$

บทนิยาม 1.8. *กราฟมีทิศทาง (directed graph)* $G = (V(G), E(G))$ ประกอบไปด้วยเซต $V(G)$ แทนจุดของกราฟ G และ เซต $E(G)$ ซึ่งอยู่ในรูปคู่อันดับของจุดในกราฟ G

ข้อสังเกต 1.9. เรากำหนดให้ G ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน.

บทนิยาม 1.10. กำหนดให้ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟมีทิศทาง ละ x, y เป็นจุดยอดในกราฟ G แล้ว *พาธ (path)* จาก x ไปยัง y ที่มีความยาว $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ คือ ลำดับ $\{x_i\}_{i=0}^n$ โดยที่ $x_0 = x$, $x_n = y$, $(x_{i-1}, x_i) \in E(G)$ สำหรับ $i = 1, 2, ..., n$.

บทนิยาม 1.11. กำหนดให้ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟมีทิศทาง จะกล่าวว่า G เป็น *กราฟเชื่อมโยง (connected graph)* ก็ต่อเมื่อ จุดยอด 2 จุดใดๆ ใน G เชื่อมได้ด้วยพาธ

บทนิยาม 1.12. กำหนดให้ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟมีทิศทาง จะกล่าวว่า G^{-1} เป็น *กราฟผกผัน (conversion graph)* ของ G ก็ต่อเมื่อ $V(G^{-1}) = V(G)$ และ $E(G^{-1}) = \{(x,y) : (y,x) \in E(G)\}$

บทนิยาม 1.13. กำหนดให้ $X \neq \emptyset$ และ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟมีทิศทาง โดนที่ $V(G) = X$ จะกล่าวว่า G มีสมบัติ *ถ่ายทอด (transitive)* ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x,y และ z ใน G

$$(x,y),(y,z) \in E(G) \Rightarrow (x,z) \in E(G)$$

บทนิยาม 1.14. กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกและ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟมีทิศทางโดยที่ $V(G) = X$ จะกล่าวว่า X มี *คุณสมบัติ A (Property A)* ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\{x_n\}$ ที่เป็นลำดับใน X ถ้า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ x และ $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $x \in X$ แล้ว จะมีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ โดยที่ $(x_{n_k}, x) \in E(G)$ สำหรับ $k \in \mathbb{N}$

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

ได้องค์ความรู้ใหม่ในสาขาการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (functional analysis) และได้เผยแพร่บทความวิจัยในวารสารระดับนานาชาติ