บทที่ 2
การทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

การทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยเรื่อง การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ของวัตถุเม็ด เพื่อในการเรียนการสอนวิชาฟิสิกส์ ในมหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1 ทบทวนแนวคิด ทฤษฎี และ/หรือหลักการที่เกี่ยวข้อง

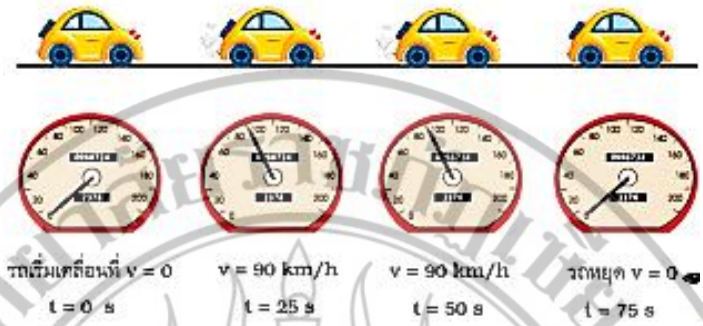
2.1.1 การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงตามแนวราบ

การเคลื่อนที่ (Motion) หมายถึง ขบวนการอย่างหนึ่งที่ทำให้มีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งอย่างต่อเนื่องตามเวลาที่ผ่านไป โดยมีทิศทางและระยะทาง และการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง (Rectilinear motion) หมายถึง การเคลื่อนที่ของวัตถุที่เป็นแนวเส้นตรงซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว เวลา ความเร่ง และระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ ลักษณะการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง สิ่งต่าง ๆ ที่อยู่รอบตัวซึ่งมีการเคลื่อนที่นั้นจะมีการเคลื่อนที่แตกต่างกันออกไป เช่น การเคลื่อนที่ในแนวตรง แนวโค้ง เป็นวงกลม หรือกลับไปกลับมาในการที่เราจะพิจารณาว่าวัตถุมีการเคลื่อนที่หรือไม่พิจารณาที่ มีการเปลี่ยนตำแหน่งหรือไม่ ถ้ามีการเปลี่ยนตำแหน่ง ถือเป็นการเคลื่อนที่ การบอกตำแหน่งของวัตถุ การบอกตำแหน่งของสิ่งต่าง ๆ นั้นทำได้โดยการบอกตำแหน่งเทียบกับตำแหน่งหรือสิ่งที่สังเกตได้โดยง่าย ซึ่งเรียกว่า ตำแหน่งอ้างอิงหรือจุดอ้างอิง ซึ่งต้องเป็นจุดที่ หยุดนิ่ง

การเคลื่อนที่แนวตรงของวัตถุ เป็นการเคลื่อนที่ที่ไม่เปลี่ยนทิศทาง เช่น การเคลื่อนที่ของลูกมะพร้าวเมื่อตกจากต้นสู่พื้นดิน การเคลื่อนที่ของรถยนต์บนถนนตรง การเคลื่อนที่ของนักกีฬาว่ายน้ำในลู่ของสระ เป็นต้น การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง แบ่งเป็น 2 แบบ คือ

1. การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงที่ไปทิศทางเดียวกันตลอด เช่น โยนวัตถุขึ้นไปตรงๆ รถยนต์ กำลังเคลื่อนที่ไปข้างหน้าในแนวเส้นตรง

2. การเคลื่อนที่ในแนวเส้นเส้นตรง แต่มีการเคลื่อนที่กลับทิศด้วย เช่น รถแล่นไปข้างหน้าในแนวเส้นตรง เมื่อรถมีการเลี้ยวกลับทิศทาง ทำให้ทิศทางในการเคลื่อนที่ตรงข้ามกัน ในขณะที่รถยนต์เริ่มเคลื่อนที่บนถนนตรง คนขับจะเหยียบคันเร่งทำให้รถเคลื่อนที่เร็วขึ้น ถ้าสังเกตที่เข็มวัดอัตราเร็วบนหน้าปัดของรถ จะพบว่าเข็มเบนมากขึ้น แสดงว่ารถเคลื่อนที่ด้วย อัตราเร็ว (speed) เพิ่มขึ้น และถ้าพิจารณาทิศของการเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว (velocity) เพิ่มขึ้น ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2. 1 การเคลื่อนที่ในแนวเส้นเส้นตรงของรถยนต์

ที่มา: www.rectilinearmotion.wordpress.com (2559).

(1) สมการการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ เป็นการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงความเร็ว ($\vec{v}$) หรือกล่าวได้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงระยะขจัด ($\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$) มีค่าคงที่

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} \tag{2.1}$$

เมื่อ $\vec{v}$ คือความเร็วของวัตถุ มีหน่วยเป็น m/s

$\Delta\vec{s}$ คือระยะขจัดของวัตถุ มีหน่วยเป็น m

Δt คือเวลาในการเคลื่อนที่ของวัตถุ มีหน่วยเป็น s

(2) สมการการเคลื่อนที่เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ เป็นการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เมื่อเวลาผ่านไปจะมีการเปลี่ยนแปลงความเร็ว หรือกล่าวได้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วมีค่าคงตัวหรือด้วยความเร่งคงตัว การคำนวณหาปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้องแสดงดังสมการต่อไปนี้

$$\vec{s} = \left[\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}\right]t \tag{2.2}$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{a}t \tag{2.3}$$

$$\vec{s} = \vec{u}t + \vec{a}t^2 \tag{2.4}$$

$$\vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{a}\vec{s} \tag{2.5}$$

เมื่อ $\vec{u}$ เป็นความเร็วต้น เมื่อเริ่มคิดเวลา (t = 0) ขนาดของ $\vec{u}$ อาจมีค่าเท่ากับศูนย์หรือไม่เท่ากับศูนย์ก็ได้ หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที (m/s)

t เป็นช่วงเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ทั้งหมด (กำหนดเวลาเริ่มต้นที่ t = 0) หน่วยเป็นวินาที (s)

$\vec{s}$ เป็นการกระจัดที่เปลี่ยนไปในช่วงเวลา Δt หน่วยเป็นเมตร (m)

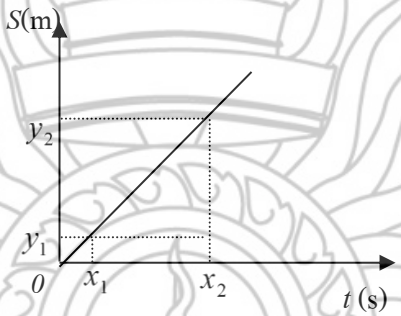
$\vec{v}$ เป็นความเร็วสุดท้ายของช่วงเวลา t หรือเป็นความเร็วเมื่อสิ้นช่วงเวลา t หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที (m/s)

$\vec{a}$ เป็นความเร่งเฉลี่ยในช่วงเวลา t หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที^{2}(m/s^2)

กรณีวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวในแนวราบกำหนดให้ปริมาณที่มีความเร็วเพิ่มขึ้นค่า $\vec{a}$ เป็นบวก และถ้าความเร็วลดลงค่า $\vec{a}$ เป็นลบ

(3) กราฟการกระจัด – เวลา

กราฟการกระจัด – เวลา มีประโยชน์สำหรับในการหาปริมาณการเคลื่อนที่ของวัตถุ เช่น รถยนต์คันหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงจากจุด A ที่เวลา $t_1 = 0$ วินาที ถึงจุด B ที่เวลา $t_2 = t$ วินาที ได้การกระจัด $\vec{s}$ เมตร



รูปที่ 2. 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง S กับ t

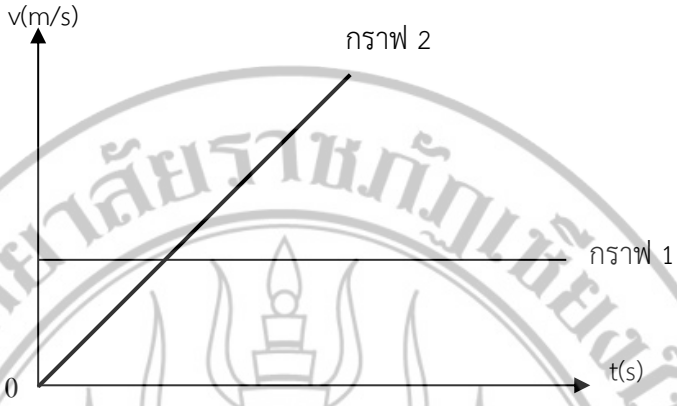
1. การกระจัด $\vec{s}$ เป็นบวกและกราฟเป็นเส้นตรง แสดงว่ารถเคลื่อนที่ไปทิศทางเดียว ไม่ย้อนกลับ

2. การกระจัด $\vec{s}$ แปรผันตรงกับเวลาและกราฟเป็นเส้นตรง แสดงว่าความเร็วคงที่ สามารถหาความเร็วได้จากความชัน (Slope) ของกราฟ

$$\text{ความเร็ว} = \text{ความชัน} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ m/s}$$

(4) กราฟความเร็ว – เวลา

วัตถุอยู่นิ่งกับที่และวัตถุที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่จะมีความเร่งเป็นศูนย์ วัตถุที่เปลี่ยนความเร็วจะมีความเร่ง ดังนั้นความเร่งสามารถหาได้จากกราฟความเร็ว – เวลา



รูปที่ 2. 3 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง v กับ t

สำหรับเส้นกราฟ 1

1. ความเร็วคงที่ไม่ว่าเวลาจะผ่านไปเท่าใดก็ตาม
2. สามารถหาการกระจัดของการเคลื่อนที่ได้จากพื้นที่ใต้กราฟดังนี้

   กระจัด = พื้นที่ใต้กราฟ = กว้าง x ยาว
3. หาความเร่งของการเคลื่อนที่จากความชันของกราฟเท่ากับศูนย์

สำหรับเส้นกราฟ 2

1. ความเร็วเป็นบวก และเพิ่มขึ้นเมื่อเวลามากขึ้น
2. ความเร็วแปรผันตรงกับเวลา ได้กราฟเป็นเส้นตรง
3. การกระจัดหาได้จากพื้นที่ใต้กราฟ

   พื้นที่ใต้กราฟ = $\frac{1}{2}$ x ฐาน x ความสูง m
4. ความเร่งหาได้จาก ความชันของเส้นกราฟ

   ความเร่ง = ความชันของเส้นกราฟ m/s^2

2.1.2 การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงในแนวดิ่งภายใต้แรงดึงดูดของโลก

การเคลื่อนที่ของสิ่งต่าง ๆ ที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน ถ้าพิจารณาโดยหลักการทางฟิสิกส์จะพบว่าเป็นการเคลื่อนที่แบบมีความเร่ง ซึ่งมีทั้งความเร่งคงตัวและความเร่งที่เปลี่ยนแปลง ในการศึกษาเบื้องต้น จะศึกษาเฉพาะการเคลื่อนที่แนวตรงด้วยความเร่งคงตัว จากการศึกษา **การตกแบบเสรี** (Free fall) ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ปล่อยให้ตกภายใต้แรงดึงดูดของโลกเพียงอย่างเดียว (ไม่คิดแรงต้านหรือแรงเสียดทานของอากาศ)

ความเร่งในการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ตกอย่างอิสระหรือตกแบบเสรีนี้ คือ ความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก (Acceleration due to gravity) ใช้ g เป็นสัญลักษณ์ ซึ่งมีค่าประมาณ

9.80665 m/s^2 ซึ่งเป็นค่าที่หาได้จากค่าเฉลี่ยทุกจุดของโลก เพื่อความสะดวกมักจะใช้ค่า g = 9.8 m/s^2 หรืออาจใช้ 10 m/s^2

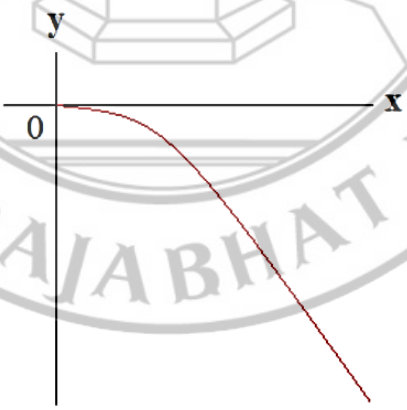
2.1.3 การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ (projectile motion) คือการเคลื่อนที่ที่เส้นทางการเคลื่อนที่เป็นแนวโค้ง พิจารณาว่าไม่มีแรงต้านของอากาศหรือมีผลน้อยจนไม่ต้องนำมาคิด ในแบบเรียนปี 2547 กล่าวว่าในภาษาอังกฤษ โพรเจกไทล์ หมายถึงวัตถุที่ขว้างหรือยิงออกไป เช่น ก้อนหินที่ถูกขว้างหรือลูกกระสุนที่ถูกยิงออกไปในบริเวณใกล้ผิวโลก ตามปกติการเคลื่อนที่ของวัตถุดังกล่าวจะสังเกตได้ว่ามีวิถีโค้ง ในทางคณิตศาสตร์เราพิจารณาการโพรเจกชัน (projection) เหมือนการฉายเงาไปกระทบรูปกราฟ ลงบนพิกัด โดยหากมีระนาบแกนนอน และแกนดิ่งก็เหมือนภาพเส้นทางการเคลื่อนที่ที่ถูกฉายลงไปตามแนวแกนนอนและแนวแกนดิ่งนั้น ควรจะแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างของการเคลื่อนที่ทั้งสองแนว โดยในแนวดิ่งจะมีความเร่งเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ด้วยแรงดึงดูดของโลกทำให้สนามของความโน้มถ่วงกระทำต่อวัตถุที่พิจารณานั้น ส่วนในแนวแกนระนาบ จะไม่อยู่ในแนวของสนามแรงดึงดูดของโลกเข้ามาเกี่ยวข้อง

ในการพิจารณารูปแบบการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ หากพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของการกระจัดในแนวดิ่ง (y) กับขนาดของการกระจัดในแนวระดับ (x) รูปสมการจะอยู่ในรูป

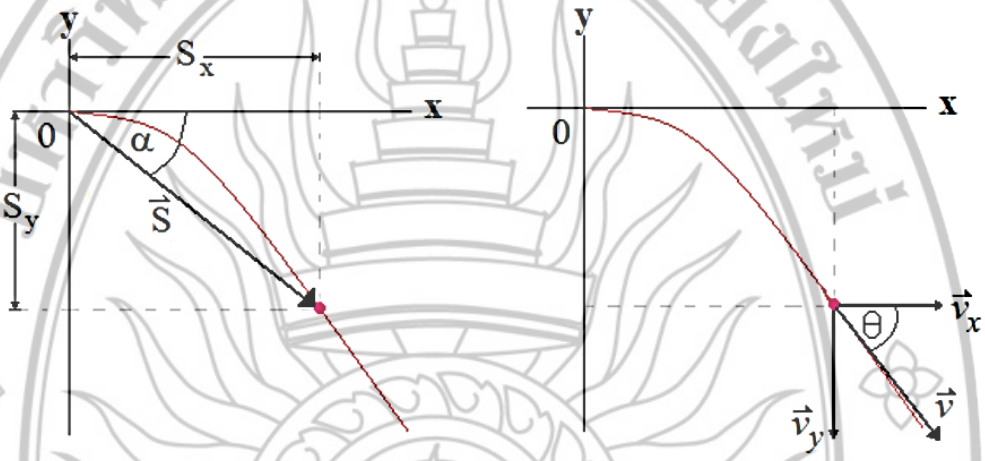
$$y = kx^2 \tag{2.6}$$

โดย k คือค่าคงตัวของการแปรผันอันเป็นสมการพาราโบลาแสดงว่า แนวการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์มีแนวการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งพาราโบลา



รูปที่ 2. 4 แนวการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

วัตถุที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ประกอบด้วยการเคลื่อนที่ทั้งในแนวระดับและแนวดิ่งพร้อมๆกัน และเป็นอิสระต่อกันการเคลื่อนที่ในแนวระดับจะเหมือนกับการเคลื่อนที่แนวตรงด้วยความเร็วคงตัว ความเร่งเป็นศูนย์ ส่วนการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งจะเหมือนกับการตกแบบเสรีด้วยความเร่งคงตัว การที่มีการเคลื่อนที่ทั้งสองแนวนี้ทำให้วัตถุเคลื่อนที่เป็นแนวโค้งได้



รูปที่ 2.5 วัตถุเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์โดยเริ่มจากจุดกำเนิดของแกนอ้างอิง x y แสดงการกระจัดและ ณ ความเร็ว ขณะหนึ่ง

โดย $\vec{S}$ แทน การกระจัดลัพธ์ของวัตถุ ณ ตำแหน่งที่พิจารณา

S_x แทน ภาพฉายของการกระจัดตามแนวแกน x

S_y แทนภาพฉายของการกระจัดตามแนวแกน y

$\vec{v}$ แทนเวกเตอร์ความเร็วลัพธ์ ณ ขณะหนึ่ง

v_x และ v_y แทนขนาดของความเร็ว ตามแนวแกน x และ y ตามลำดับ

มุม α แสดงทิศทางของการกระจัดกระทำกับแนวระดับและ มุม θ แสดงทิศทางของความเร็วขณะหนึ่งกระทำกับแนวระดับ

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวระดับ ความเร็วในแนวระดับคงตัว แรงลัพธ์ในแนวระดับที่กระทำต่อวัตถุมีค่าเป็นศูนย์ ถือว่าแรงต้านอากาศมีค่าน้อยมาก การกระจัดและความเร็วของวัตถุสำหรับการเคลื่อนที่ในแนวระดับ มีความสัมพันธ์

$$S_x = v_x t \qquad (2.7)$$

ในส่วนการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งจะเหมือนการปล่อยวัตถุตกแบบเสรีการกระจัดและความเร็วของวัตถุสำหรับการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง จะพิจารณาหาจากสมการ

$$v_y = u_y + gt \tag{2.8}$$

$$S_y = \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.9}$$

ด้วยทิศทางของการกระจัดของวัตถุ

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{S_y}{S_x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{S_y}{S_x}\right] \tag{2.10}$$

หรือหาทิศทางจากความเร็ว

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{v_y}{v_x}\right] \tag{2.11}$$

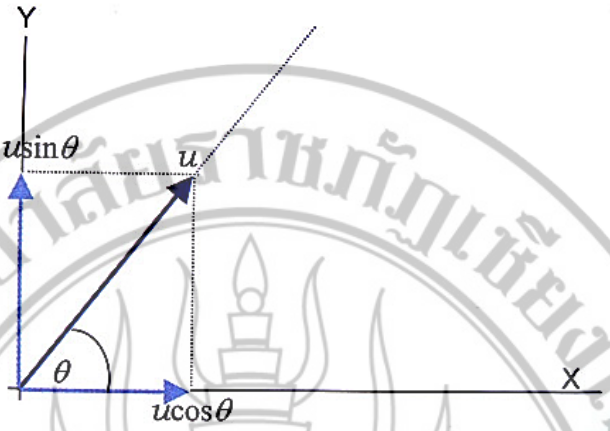
ในกรณีที่วัตถุที่มีความเร็วต้นทำมุมกับแนวระดับตัวอย่างในการประยุกต์คือ การยิงปืนใหญ่สู้กัน ในสมัยโบราณต้องมีการทำมุมปืนใหญ่ เพื่อให้ยิงไปตามระยะทางเป้าหมายที่ต้องการ หรือให้ได้ไกลที่สุด จะเป็นระยะเท่าไรเราจะพบความสัมพันธ์ใน

การเคลื่อนที่ในแนวระดับ

$$S_x = u_x t = u\cos(\theta)t \tag{2.12}$$

การเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง

$$S_y = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2 = u\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.13}$$



รูปที่ 2. 6 แนวการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ถูกขว้างออกไปด้วยความเร็วต้น u ในทิศทางทำมุม θ กับแนวระดับ

การวิเคราะห์พิสัยของวัตถุที่มีความเร็วต้นทำมุมกับแนวระดับ เพื่อหาตำแหน่งระยะที่จะส่งวัตถุออกไปตกคือ พิสัย

$$S_x = \frac{u^2 \sin(2\theta)}{g} \qquad (2.14)$$

โดยมุม $\theta = 45^\circ$ เป็นค่าที่ทำให้ระยะทางในแนวระดับไกลที่สุด

หลักการพิจารณาเครื่องหมาย

1. กำหนด u_y มีทิศเป็นบวก (+) เสมอ
2. ถ้าเวกเตอร์ใดมีทิศเดียวกับ u_y แล้วจะมีเครื่องหมายเป็นบวก (+)
3. ถ้าเวกเตอร์ใดมีทิศตรงข้ามกับ u_y แล้วจะมีเครื่องหมายเป็นลบ (-)

เวลาที่วัตถุใช้เคลื่อนที่ตามแนวโค้ง = เวลาที่เงาของวัตถุใช้เคลื่อนที่ตามแนวแกน X

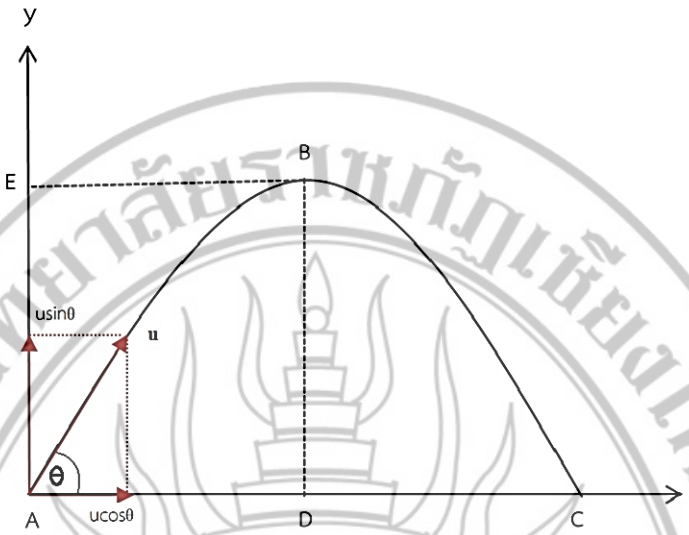
= เวลาที่เงาของวัตถุใช้เคลื่อนที่ตามแนวแกน Y

รูปที่ 2.7 เวลาที่วัตถุใช้เคลื่อนที่ตามแนวโค้ง

ตามรูปข้างบน สมมุติวัตถุวิ่งจาก O ไปตามทางโค้ง (เส้นประ) ถึง A (ทางโค้ง OA) เงาทางแกน X จะวิ่งจาก O ไปถึง B และเงาทางแกน Y จะวิ่งจาก O ไปถึง C เวลาของการเคลื่อนที่จาก O ไปถึง B เท่ากับเวลาของการเคลื่อนที่จาก O ไปถึง C ดังนั้น $t_{OA} = t_{OB} = t_{OC}$

2.1.4 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ วัตถุเริ่มเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้นในทิศทำมุมกับแนวระดับ ต่อไปจะศึกษาการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์โดยอาศัยการแยกพิจารณาความเร็วของวัตถุออกในแนวราบและในแนวดิ่ง แล้วคำนวณหาค่าต่าง ๆ ที่ต้องการทราบโดยไม่คิดเรื่องแรงต้าน หรือแรงลอยตัวของอากาศ แล้วพิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงแต่ละแกน



รูปที่ 2.8 แสดงความเร็วต้นในทิศทำมุมกับแนวระดับ

จากรูปภาพที่ 2.8 แตกแรงของความเร็วต้น(u) เป็น $u_x = u\cos\theta$ มีค่าคงตัวเสมอในแนวราบ และ $u_y = u\sin\theta$ มีทิศพุ่งขึ้นเสมอในแนวดิ่ง

1. หาเวลา (t) ที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นถึงจุดสูงสุด

โดยพิจารณาที่จุดสูงสุดความเร็วในแนวดิ่งจะมีค่าเป็นศูนย์ $v_y = 0$

พิจารณาแนวดิ่ง ; จากสมการ $v_y = u_y + gt$

$$0 = u\sin\theta + (-g)t_{AB}$$

จะได้ $$t_{AB} = \frac{u\sin\theta}{g} = t_{AD} = t_{AE} \quad (2.15)$$

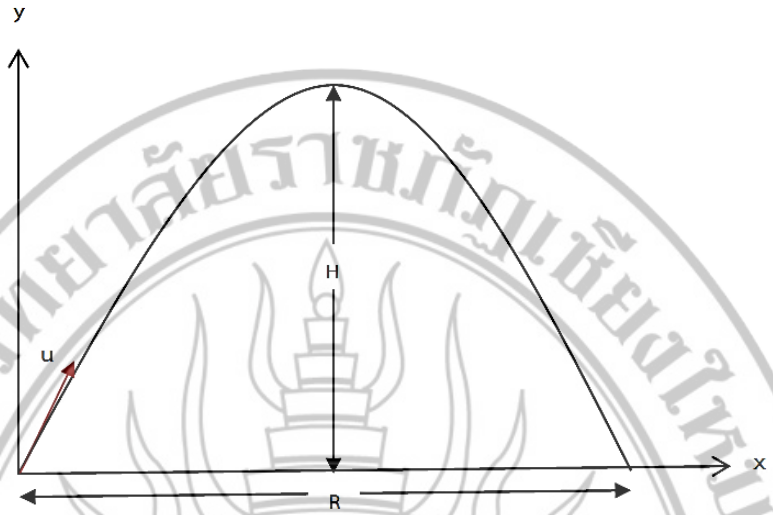
2. หาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ทั้งหมด (จุดเริ่มต้นอยู่จุดเดียวกับวัตถุตก)

จากสูตร $$S_y = u_y + gt_{AB}$$

$$0 = u\sin\theta t_{AC} + \frac{1}{2}(-g)t_{AC}^2$$

$$t_{AC} = \frac{2u\sin\theta}{g} = t_{AEA} \quad (2.16)$$

ข้อสังเกต เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ทั้งหมดเป็นสองเท่าของเวลาที่วัตถุขึ้นไปได้สูงสุด



รูปที่ 2.9 แสดงระยะการกระจัดจุดเริ่มต้นไปถึงจุดที่วัตถุตกในแนวระดับมีค่าท่ากัน (R) และแสดงระยะสูงสุดในแนวดิ่ง (H)

3. หาระยะทางจากจุดเริ่มต้นไปถึงจุดที่วัตถุตกในแนว 2 ระดับ (Range) หาระยะทางในแนวราบที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ไกลที่สุด

พิจารณาในแนวราบ ; จากสมการ $S_x = u_x t_{AC}$

$$R = u\cos\theta\left[\frac{2u\sin\theta}{g}\right]$$

$$R = \frac{u^2}{g}\left[2\sin\theta\cos\theta\right]$$

เนื่องจาก $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$

จะได้ $$R = \frac{u^2}{g}\sin 2\theta \qquad (2.17)$$

วัตถุจะมี R มากที่สุด เมื่อ $\sin 2\theta$ มีค่ามากที่สุดนั่นคือ $2\theta = 90^\circ$ จะได้ $\theta = 45^\circ$

แสดงว่า $$R_{\max} = \frac{u^2}{g} \quad \text{เมื่อ} \quad \theta = 45^\circ \qquad (2.18)$$

4. หาระยะสูงสุดของวัตถุจากจุดเริ่มต้น $(H_{\max})$

พิจารณาในแนวดิ่งจากสมการ $v_y^2 = u_y^2 + 2gS_y$

$$\frac{v_y^2}{g} = u_y^2 + 2gS_y$$

$$0 = (u\sin\theta)^2 + 2(-g)H_{\max}$$

จะได้ $$H_{\max} = \frac{u^2}{g}\sin^2\theta \qquad (2.19)$$

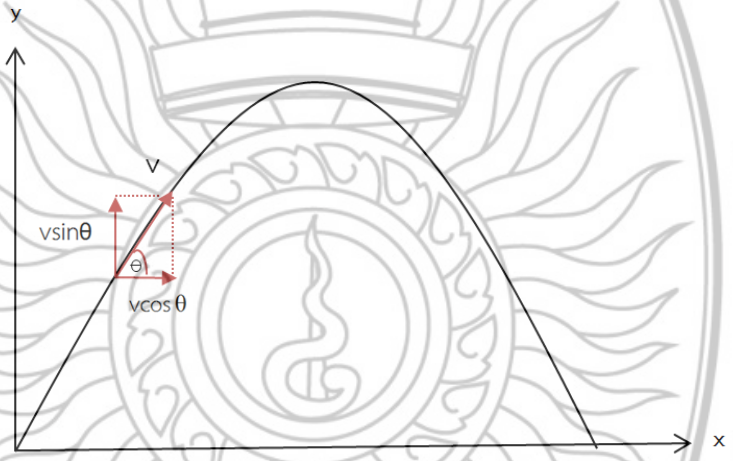
5. จากรูปที่ 2.9 ถ้า H เป็นระยะสูงสุดในแนวดิ่ง และ R เป็นระยะไกลแนวระดับแล้ว

$$H = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$R = \frac{u^2}{g} 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{(1)H}{(2)R} = \frac{1}{2}\tan\theta \qquad (2.20)$$

6. ความเร็วของวัตถุในแนวสัมผัสเป็น (v)



รูปที่ 2.10 แสดงความเร็วของวัตถุในแนวเส้นสัมผัส

จากรูปที่ 2.10 จะได้ความเร็วของวัตถุในแนวเส้นสัมผัส

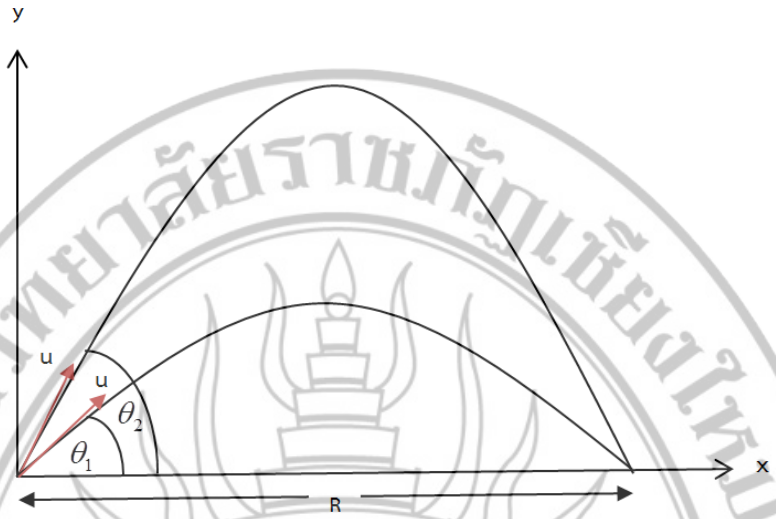
$$v = \sqrt{v^2\cos^2\theta + v^2\sin^2\theta} \qquad (2.21)$$

7. ถ้า $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ ระยะการกระจัดจากจุดเริ่มต้นไปถึงจุดที่วัตถุตกในแนวระดับมีค่าเท่ากันแล้ว

$$R = \frac{v^2 \sin 2\theta_1}{g} \qquad (2.22)$$

$$R = \frac{v^2 \sin 2\theta_2}{g} \qquad (2.23)$$

เนื่องจาก $\sin 2\theta_1 = \sin 2\theta_2$ ดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 แสดงระยะกระจัดจากจุดเริ่มต้นไปถึงจุดที่วัตถุตกในแนวระดับมีค่าเท่ากัน

2.2 ทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากตัวอย่างงานวิจัยที่พบความคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการเคลื่อนที่แบบโพรเจคไทล์นี้ ทำให้เห็นได้ว่าผู้เรียนไม่สามารถแสดงแนวคิดทางวิทยาศาสตร์เพื่ออธิบายและเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างปรากฏการณ์ทางธรรมชาติกับทฤษฎีได้ชัดเจนและถูกต้อง สาเหตุอาจเป็นเพราะขาดสื่อการสอนหรือกิจกรรมที่เหมาะสม ที่ทำหน้าเชื่อมโยงหลักการทางทฤษฎีกับปรากฏการณ์ธรรมชาติเข้าด้วยกัน จึงมีนักวิจัยทางฟิสิกส์ศึกษาได้หาแนวทางในการแก้ไขปัญหาดังกล่าวเช่น Heck & Uylings (2006) เริ่มนำเทคนิคการวิเคราะห์วิดีโอความเร็วสูงมาใช้ในงานวิจัย โดยใช้กล้อง Casio EXILIM Pro EX-F1 ด้วยความเร็วในการถ่าย 300 เฟรมต่อวินาที ศึกษาการตกอิสระของลูกขนไก่ ที่ปล่อยจากที่สูง 4.5 เมตร แล้วนำภาพวิดีโอไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม The Coach 6 Video Tool ผลการวิจัยพบว่าผู้เรียนสามารถบันทึกภาพวิดีโอและวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุได้อย่างถูกต้องเมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีในตำราเรียน จัดเป็นการกระตุ้นการเรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้เทคนิคการถ่ายภาพวิดีโอความเร็วสูงยังช่วยให้ประหยัดเวลาในการทดลองและการวิเคราะห์ผลการทดลอง สรายุทธ พรหมราช และพรรัตน์ รัตนกสิวิชช์ (2012) ได้ใช้เทคนิคการวิเคราะห์วิดีโอความเร็วสูงในการศึกษาการกลิ้งของทรงกระบอกตันและกลวงเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนในชั้นเรียนและช่วยอธิบายผลของความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของทรงกระบอกทั้งสองลักษณะ ส่งผลให้สามารถหามุมวิกฤตที่ทำให้ทรงกระบอกทั้งสองกลิ้งโดยไม่ไถลได้ โดยค่าจากการคำนวณทางทฤษฎีของมุมวิกฤตมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากการทดลอง ผลจากการวิจัยนี้ได้ถูกนำไปอธิบายประกอบการสัมภาษณ์นักศึกษาชั้นปีที่ 1 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ และพบว่านักศึกษาส่วนใหญ่มีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับเรื่อง

โมเมนต์ความเฉื่อย บทบาทของแรงเสียดทานที่มีต่อการกลิ้ง งานในการกลิ้ง รวมถึงความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกแบบต่างๆ เป็นต้น การศึกษาอีกด้านหนึ่งของงานวิจัยนี้เป็นการนำข้อมูลจากการสัมภาษณ์ไปออกแบบชุดอุปกรณ์สาธิตการเคลื่อนที่แบบกลิ้ง วิดีโอการสาธิตและใบกิจกรรม เพื่อประกอบการบรรยายเชิงมีปฏิสัมพันธ์ ผลจากการวิจัยพบว่าการสอนโดยใช้สื่อสาธิตประกอบการบรรยายมีประสิทธิภาพมากกว่าการสอนแบบบรรยายเพียงอย่างเดียว จิราภรณ์ ปุณยวัจน์พรกุล และพรรัตน์ วัฒนกสิวิชช์ (2013) ได้ใช้เทคนิคการวิเคราะห์วิดีโอความเร็วสูง ในการศึกษาการเคลื่อนที่แบบสั่นของวัตถุติดสปริงในกลีเซอรีน พบว่าเทคนิคนี้สามารถทำให้เห็นภาพการสั่นของวัตถุติดสปริงในกลีเซอรีนที่อุณหภูมิต่างกัน มีสามลักษณะสำคัญคือ การเคลื่อนที่แบบ การหน่วงด้อย (Underdamping) การหน่วงวิกฤต (Critical damping) และการหน่วงเกิน (Overdamping) นอกจากนี้เมื่อนำผลการทดลองมาเปรียบเทียบกับค่าทางทฤษฎีของตัวแปรที่เกี่ยวข้องพบว่ามีค่าความคลาดเคลื่อนเล็กน้อย อีกทั้งสามารถเชื่อมโยงหลักการทางทฤษฎีกับสถานการณ์จริง ทำให้ผู้เรียนสามารถมองเห็นภาพการเคลื่อนที่ที่เป็นนามธรรมได้ เป็นต้น

นอกจากนี้ยังพบงานวิจัยทางด้านการสำรวจและพัฒนาแนวคิดวิทยาศาสตร์ เช่นงานวิจัยของไอนิง เจ๊ะเหลาะ อนุมัติ เดชนะ และสธน เสนาสวัสดิ์ (2558) ได้ศึกษามโนมติที่คลาดเคลื่อนเรื่อง แรง และกฎการเคลื่อนที่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ ผลการวิจัยพบว่าก่อนเรียนนักเรียนมีระดับความเข้าใจมโนมติหลายระดับมีตั้งแต่ระดับคลาดเคลื่อนมากไปจนถึงระดับที่มีความเข้าใจที่สมบูรณ์ หลังเรียนมีความเข้าใจมโนมติระดับคลาดเคลื่อนลดลง และมีความเข้าใจในระดับที่สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ธณัฏฐา คงทน บุญนาค สุขุมเมฆ และชาตรี ฝ่ายคำตา (2559) ได้ศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้โดยใช้แบบจำลองเป็นฐาน และพัฒนาแนวคิดของนักเรียน เรื่อง เคมีอินทรีย์ ผลการวิจัยพบว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้แบบจำลองเป็นฐานช่วยให้เกิดการอภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน ส่งเสริมให้นักเรียนลงมือปฏิบัติจริง มีปฏิสัมพันธ์กับเพื่อนในชั้นเรียน ประกอบกับการใช้สื่อการเรียนรู้ที่หลากหลาย ทำให้นักเรียนส่วนใหญ่ร้อยละ 45.8 สามารถพัฒนาแนวคิด เรื่อง เคมีอินทรีย์ ให้มีแนวคิดที่ถูกต้อง (SU) รองลงมาร้อยละ 29.5 มีแนวคิดถูกต้องบางส่วน (PU) ร้อยละ 15.8 มีแนวคิดถูกต้องบางส่วนและคลาดเคลื่อนบางส่วน (PU/SM) และร้อยละ 8.9 มีแนวคิดคลาดเคลื่อน (SM) อัจฉรีย์ สังขรักษ์ สิงหา ประสิทธิ์พงศ์ และสิทธิชัย วิชัยดิษฐ (2560) ได้ศึกษาการพัฒนากระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรมและผลของการพัฒนาความสามารถในการออกแบบเชิงวิศวกรรมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ด้วยการจัดการเรียนรู้ตามแนวทางสะเต็มศึกษา เรื่อง การสังเคราะห์ด้วยแสงของพืช ผลการวิจัยพบว่า การจัดการเรียนรู้ตามแนวทางสะเต็มศึกษาส่งผลให้นักเรียนชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ 5 มีการพัฒนากระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรมดีขึ้นระหว่างการจัดการเรียนรู้ในแต่ละครั้ง และนักเรียนมีความสามารถในการการออกแบบเชิงวิศวกรรมหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 จากตัวอย่างงานวิจัยที่กล่าวไปแล้ว จะเห็นว่าสามารถพัฒนาแนวคิดวิทยาศาสตร์ของผู้เรียนได้ หากมีการจัดการเรียนการสอนที่ให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติจริง หรือเห็นภาพจริง