บทที่ 1 บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาของการวิจัย

ให้ $T(X)$ เป็นเซตของการแปลงทั้งหมดจากเซต X ที่ไม่เป็นเซตว่าง ไปยังเซต X ถ้า $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ โดยที่ $n \in \mathbb{N}$ เราจะเขียน T_n แทน $T(X)$ เป็นที่รู้กันดีว่า $T(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยปรกติภายใต้การประกอบ (composition) ของฟังก์ชัน สมบัติของ $T(X)$ ถูกศึกษาไว้อย่างกว้างขวาง ตัวอย่างเช่น ในปี ค.ศ. 1966 Bayramov [1] ได้ให้ลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของ T_n โดยประกอบไปด้วยยูเนียนของกรุปย่อยใหญ่สุดของกรุปสมมาตร (the symmetric group) S_n และ $T_n \setminus S_n$, หรือ เป็นยูเนียนของเซตของการแปลง $\alpha \in T_n$ ที่ซึ่ง $\mathrm{rank}(\alpha) \leq n-2$ กับ S_n อย่างใดอย่างหนึ่ง ในปี ค.ศ. 2002 You [20] ได้ระบุกึ่งกรุปย่อยปรกติใหญ่สุดทั้งหมดของไอดีลของ T_n ต่อมาในปี ค.ศ. 2004 Yang and Yang [19] ได้อธิบายกึ่งกรุปย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของไอดีลของ T_n ในปี ค.ศ. 2014 Zhao, Hu and You [21] ได้แสดงว่ากึ่งกรุปย่อยปรกติใหญ่สุดใด ๆ ของไอดีลของ T_n ถูกก่อกำเนิดด้วยนิจพล (idempotent generated) และในปี ค.ศ. 2015 East, Michell และ Péresse [3] ได้ศึกษากึ่งกรุปย่อยใหญ่สุดของ $T(X)$ เมื่อ X เป็นเซตอนันต์ที่บรรจุกึ่งกรุปย่อยของกรุปสมมาตรบน X

ให้ X เป็นเซต และ Y เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง ให้

$$T(X,Y) = \{\alpha \in T(X) : X\alpha \subseteq Y\}$$

ที่ซึ่ง $X\alpha$ แทนเซตของเรนจ์ของ α แล้ว $T(X,Y)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ในปี ค.ศ. 1975 Symons [18] ได้อธิบายอัตสัณฐาน (automorphism) บน $T(X,Y)$ และยังได้ระบุการสมสัณฐานระหว่างกึ่งกรุป $T(X_1,Y_1)$ และ $T(X_2,Y_2)$ ในปี ค.ศ. 2005 Nenthein, Youngkhong และ Kemprasit [8] ได้ให้ลักษณะเฉพาะของสมาชิกปรกติของ $T(X,Y)$

ในปี ค.ศ. 2008 Sanwong and Sommanee [13] ได้นิยาม

$$F(X,Y) = \{\alpha \in T(X,Y) : X\alpha \subseteq Y\alpha\}$$

และได้แสดงว่า $F(X,Y)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยปรกติที่ใหญ่ที่สุดของ $T(X,Y)$ เขายังได้ระบุ-บางคลาสของ กึ่งกรุปย่อยผกผันใหญ่สุดของ $T(X,Y)$ และได้ให้ลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์กรีน-ของ $T(X,Y)$

ในปี ค.ศ. 2011 Mendes-Gonçalves และ Sullivan [7] ได้ระบุไอดีลทั้งหมดของ $T(X,Y)$ ในปีเดียวกัน Sanwong [12] ได้อธิบายความสัมพันธ์กรีน ไอดีล และกึ่งกรุปย่อยปรกติใหญ่สุดของ $F(X,Y)$ ยิ่งไปกว่านั้นผู้เขียนยังได้พิสูจน์ว่าทุก ๆ กึ่งกรุปปรกติ S สามารถฝังเข้าไปใน $F(S^1,S)$ ได้ ต่อมาในปี ค.ศ. 2013 Sommanee and Sanwong [16] ได้คำนวณหาแรงก์ของ $F(X,Y)$ เมื่อ X เป็นเซตจำกัด นอกจากนั้น เขายังได้หาแรงก์และแรงก์นิจพลของไอดีลของมัน ต่อมาในปี ค.ศ. 2014 Fernandes and Sanwong [4] ได้คำนวณหาแรงก์ของ $T(X,Y)$ ล่าสุดในปี ค.ศ. 2018 Sommanee [14] ได้อธิบายบางกึ่งกรุปย่อยผกผันใหญ่สุดของ $F(X,Y)$ และได้ระบุกึ่ง-กรุปย่อยปรกติใหญ่สุดทั้ง หมดของไอดีลของ $F(X,Y)$

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และให้ $T(V)$ เป็นเซตของการแปลงเชิงเส้นทั้ง-หมดจาก V ไป V เป็นที่รู้กันดีว่า $T(V)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติภายใต้การประกอบของฟังก์ชัน ดู [6, page 63]

สำหรับ W ที่เป็นปริภูมิย่อยของ V ให้

$$T(V,W) = \{\alpha \in T(V) : V\alpha \subseteq W\}.$$

แล้วจะได้ว่า $T(V,W)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(V)$ ในปี ค.ศ. 2007 Nenthein และ Kemprasit [9] ได้พิสูจน์ว่า $\alpha \in T(V,W)$ เป็นสมาชิกปรกติของ $T(V,W)$ ก็ต่อเมื่อ $V\alpha = W\alpha$ ต่อจาก-นั้นพวกเขาได้แสดงว่า $T(V,W)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ ก็ต่อเมื่อ $V = W$ หรือ $W = \{0\}$ อย่าง-ใดอย่างหนึ่ง ในปี ค.ศ. 2008 Sullivan [17] ได้พิสูจน์ว่าเซต

$$Q = \{\alpha \in T(V,W) : V\alpha \subseteq W\alpha\}$$

ประกอบไปด้วยสมาชิกปรกติทั้งหมดของ $T(V,W)$ กล่าวคือ Q เป็นกึ่งกรุปย่อยปรกติที่ใหญ่ที่-สุดของ $T(V,W)$ ดู [17, บทตั้ง 1] กึ่งกรุปนี้มีความสำคัญในการให้ลักษณะเฉพาะของความ-สัมพันธ์กรีนบน $T(V,W)$ ผู้เขียนยังได้แสดงว่า Q เป็นไอดีลขวาของ $T(V,W)$ เสมอ และ-เขาได้อธิบายไอดีลทั้งหมดของ Q และ $T(V,W)$ ล่าสุดในปี ค.ศ. 2017 Sommanee และ Sangkhanan [15] ได้ระบุกึ่งกรุปย่อยปรกติทั้งหมดของ Q เมื่อ W เป็นปริภูมิย่อยของ V ที่มีมิติจำกัดเหนือฟีลด์จำกัด F พวกเขายังได้คำนวณหาแรงก์และแรงก์นิจพลของ Q เมื่อ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัดเหนือฟีลด์ F

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

(1) ระบุกึ่งกรุปย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของกึ่งกรุปการแปลงเชิงเส้น $F(V,W)$ เมื่อ W เป็นปริภูมิย่อยของ V ที่มีมิติจำกัดเหนือฟีลด์ F

(2) อธิบายกึ่งกรุปย่อยปรกติใหญ่สุดของไอดีลของกึ่งกรุปการแปลงเชิงเส้น $F(V,W)$ เมื่อ W เป็นปริภูมิย่อยของ V ที่มีมิติจำกัดเหนือฟีลด์ F

1.3 สมมติฐานของการวิจัย

เห็นได้ชัดว่าเซต Q ที่ถูกนิยามใน [17] เท่ากันกับเซต $F(V,W)$ ดังนั้นไอดีลทั้งหมดของ $F(V,W)$ อยู่ในรูป $Q_k = \{\alpha \in F(V,W) : \dim(V\alpha) \leq k\}$ เมื่อ $0 \leq k \leq n = \dim(W)$ ยิ่งไปกว่านั้นเราทราบว่า $Q_k = J(0) \cup J(1) \cup \cdots \cup J(k)$ ที่ซึ่ง $J(k) = \{\alpha \in F(V,W) : \dim(V\alpha) = k\}$

(i) กำหนดให้ $n \geq 2$ และ S เป็นกึ่งกรุปย่อยใหญ่สุดของ $F(V,W)$ แล้ว S จะเป็นรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งต่อไปนี้

(1) $Q_{n-2} \cup J(n)$ หรือ

(2) $Q_{n-1} \cup M$ ซึ่ง M เป็นกรุปย่อยใหญ่สุดใน $J(n)$

(ii) แต่ละกึ่งกรุปย่อยปรกติใหญ่สุดของ Q_k ซึ่ง $2 \leq k \leq n-1$ ต้องเป็นรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งต่อไปนี้

(1) $Q_{k-1} \cup (J(k) \setminus L_\alpha)$ หรือ

(2) $Q_{k-1} \cup (J(k) \setminus R_\beta)$

ที่ซึ่ง $\alpha, \beta \in J(k)$, L_α คือชั้นสมมูล $\mathcal{L}$ ที่บรรจุ α ใน $J(k)$ และ R_β คือชั้นสมมูล $\mathcal{R}$ ที่บรรจุ β ใน $J(k)$

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาบนกึ่งกรุปการแปลงเชิงเส้น $Q = F(V,W) = \{\alpha \in T(V,W) : V\alpha \subseteq W\alpha\}$ เมื่อ W เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V ที่มีมิติจำกัดเหนือฟีลด์ F

1.5 นิยามศัพท์เฉพาะ

บทนิยาม 1.5.1. *การดำเนินการทวิภาค* (binary operation) บนเซต S ที่ไม่เป็นเซตว่าง คือฟังก์ชัน $\cdot$ จาก $S \times S$ ไปยัง S

ภาพ (image) ใน S ของสมาชิก $(a, b) \in S \times S$ จะเขียนแทนด้วย $a \cdot b$ แต่โดยทั่วไปหากไม่เกิดความสับสน เราจะเขียนแทน $a \cdot b$ ด้วย ab และเรียกว่าผลคูณของ a และ b

บทนิยาม 1.5.2. *กึ่งกรุป* (semigroup) คือเซต S ที่ไม่เป็นเซตว่างกับการดำเนินการทวิภาคบน S ที่สอดคล้องกับสมบัติการเปลี่ยนหมู่ กล่าวคือ $a(bc) = (ab)c$ สำหรับทุก ๆ $a, b, c \in S$

บทนิยาม 1.5.3. เรียกเซต T ที่ไม่เป็นเซตว่างของกึ่งกรุป S ว่า*กึ่งกรุปย่อย* (subsemigroup) ของ S ถ้า T เป็นกึ่งกรุปภายใต้การดำเนินการทวิภาคใน S นั่นคือ $xy \in T$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in T$

บทนิยาม 1.5.4. กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุป ถ้ามีสมาชิก 1 ใน S โดยที่

$$x1 = x = 1x \text{ สำหรับทุก ๆ } x \in S$$

เราจะเรียก 1 ว่า*สมาชิกเอกลักษณ์* (identity identity) ของ S และเรียก S ว่า*โมนอยด์* (monoid) โมนอยด์ S จะเรียกว่า*กรุป* (group) ถ้าแต่ละสมาชิก $a \in S$ มีสมาชิก $a' \in S$ ซึ่ง $aa' = 1 = a'a$

เราเรียกกรุป G ที่มีสมบัติการสลับที่ ($ab = ba$ สำหรับทุก ๆ $a, b \in G$) ว่า*กรุปสลับที่* (commutative group) หรือ *อาบีเลียนกรุป* (abelian group)

จำนวนเชิงการนับ (cardinal number) ของเซต A ใด ๆ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|A|$

บทนิยาม 1.5.5. ถ้า S เป็นกึ่งกรุป โดยที่ $|S| \geq 2$ และบรรจุสมาชิก 0 ซึ่ง

$$x0 = 0 = 0x \text{ สำหรับทุก ๆ } x \in S$$

เราจะเรียกสมาชิก 0 ว่า*สมาชิกศูนย์* (zero element) ของ S

บทนิยาม 1.5.6. สมาชิก a ของกึ่งกรุป S จะเรียกว่า*สมาชิกปรกติ* (regular element) ถ้า $a = axa$ สำหรับบาง $x \in S$ และเรียก S ว่า*กึ่งกรุปปรกติ* (regular semigroup) ถ้าทุก ๆ สมาชิกใน S เป็นสมาชิกปรกติ

บทนิยาม 1.5.7. กำหนดให้ M เป็นกึ่งกรุปย่อยของกึ่งกรุป S โดยที่ $M \subsetneq S$ จะเรียก M ว่าเป็น*กึ่งกรุปย่อย (กึ่งกรุปย่อยปรกติ) ใหญ่สุด* (maximal (regular) subsemigroup) ของ S ถ้า $M \subseteq N \subseteq S$ และ N เป็นกึ่งกรุปย่อย (กึ่งกรุปย่อยปรกติ) ของ S แล้ว $M = N$ หรือ $N = S$

บทนิยาม 1.5.8. สมาชิก e ของกึ่งกรุป S เรียกว่า*นิจพล* (idempotent) ถ้า $e^2 = e$ เซตของนิจพลทั้งหมดใน S เขียนแทนด้วย $E(S)$ สำหรับ $e, f \in E(S)$ นิยามอันดับบางส่วนบน $E(S)$ โดย

$$e \leq f \text{ ก็ต่อเมื่อ } e = ef = fe$$

เราเรียก $\leq$ ว่า*อันดับบางส่วนธรรมชาติ* (natural partial order) บน $E(S)$

บทนิยาม 1.5.9. กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปที่บรรจุสมาชิก 0 และ $0 \neq e \in E(S)$ จะเรียกสมาชิก e ว่า*นิจพลปฐมฐาน* (primitive idempotent) ถ้าแต่ละสมาชิก $f \in E(S)$,

$$\text{ถ้า } f \leq e \text{ แล้ว } f = 0 \text{ หรือ } f = e$$

บทนิยาม 1.5.10. กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุป และ A เป็นเซตย่อยของ S ที่ไม่เป็นเซตว่าง กึ่งกรุปย่อย $\langle A \rangle$ ของ S นิยามโดย

$$\langle A \rangle = \cap \{T : T \text{ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ } S \text{ ซึ่งบรรจุ } A\}$$

เราเรียก $\langle A \rangle$ ว่ากึ่งกรุปย่อยของ S ที่ถูกก่อกำเนิดโดย A

นอกจากนี้ $\langle A \rangle$ ยังเป็นกึ่งกรุปย่อยที่เล็กที่สุดของ S ที่บรรจุ A และสามารถแสดงได้ว่า

$$\langle A \rangle = \{a_1 a_2 \cdots a_n : a_i \in A \text{ สำหรับทุก ๆ } 1 \leq i \leq n \text{ และ } n \in \mathbb{N}\}$$

ถ้า $\langle A \rangle = S$ แล้ว A จะเรียกว่า*เซตก่อกำเนิด* (generating set) ของ S ในกรณีที่ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ เราจะเขียนแทน $\langle A \rangle$ ด้วย $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$

ให้ X เป็นเซตใด ๆ และ ρ, δ เป็นความสัมพันธ์ (relation) บนเซต X นั่นคือ $\rho, \delta \subseteq X \times X$ กำหนดการประกอบ (composition) $\circ$ ของ ρ และ δ เขียนแทนด้วย $\rho \circ \delta$ ดังนี้

$$\rho \circ \delta = \{(x, y) \in X \times X : \text{ มี } z \in X \text{ ซึ่ง } (x, z) \in \rho \text{ และ } (z, y) \in \delta\}$$

กำหนดให้ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X สำหรับ $x \in X$ ชั้นสมมูลที่บรรจุ

สมาชิก x จะเขียนแทนด้วย $x\rho$ และเซตของชั้นสมมูลทั้งหมดของ X ภายใต้ความสัมพันธ์สมมูล ρ เรียกว่า*เซตผลหาร* (quotient set) ซึ่งจะเขียนแทนด้วย X/ρ

บทนิยาม 1.5.11. กำหนดให้ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนกึ่งกรุป S จะเรียก ρ ว่า*สมภาค* (congruence) ถ้าสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้ สำหรับทุก ๆ $a, b, c, d \in S$,

$$a \,\rho\, b \text{ และ } c \,\rho\, d \Rightarrow ac \,\rho\, bd$$

บทนิยาม 1.5.12. กำหนดให้ ρ เป็นสมภาคบนกึ่งกรุป S นิยามการดำเนินการทวิภาคบนเซตผลหาร S/ρ ดังต่อไปนี้ สำหรับ $a, b \in S$,

$$(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$$

แล้ว S/ρ เป็นกึ่งกรุปภายใต้การดำเนินการดังกล่าว และเรียก S/ρ เป็น*กึ่งกรุปผลหาร* (quotient semigroup) ของ S โดย ρ

บทนิยาม 1.5.13. กำหนดให้ S และ T เป็นกึ่งกรุป เรียกฟังก์ชัน $\phi\colon S \to T$ ว่าเป็น*ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน* (homomorphism) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$(xy)\phi = (x\phi)(y\phi) \text{ สำหรับทุก ๆ } x, y \in S$$

ถ้า ϕ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้วจะเรียก ϕ ว่า*ฟังก์ชันเอกสัณฐาน* (monomorphism) และถ้า ϕ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก S ไปทั่วถึง T แล้วจะเรียก ϕ ว่า*ฟังก์ชันสมสัณฐาน* (isomorphism) ในกรณีนี้จะกล่าวว่า S และ T *สมสัณฐานกัน* (isomorphic) ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $S \cong T$

ให้ A และ B เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S ที่ไม่เป็นเซตว่าง กำหนด

$$AB = \{ab : a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

บทนิยาม 1.5.14. เรียกเซตย่อย A ของกึ่งกรุป S ที่ไม่เป็นเซตว่างว่า*ไอดีล* (ideal) ถ้า $SA \subseteq A$ และ $AS \subseteq A$

บทนิยาม 1.5.15. กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปที่บรรจุสมาชิกศูนย์ 0 จะเรียก S ว่ากึ่งกรุป 0-*เชิงเดียว* (0-simple) ถ้า $S^2 \neq \{0\}$ และมีเพียง $\{0\}$ และ S เท่านั้นที่เป็นไอดีลของ S

บทนิยาม 1.5.16. *กึ่งกรุป 0-เชิงเดียวบริบูรณ์* (completely 0-simple semigroup) คือกึ่งกรุป 0-เชิงเดียวที่บรรจุนิจพลปฐมฐาน

สำหรับกึ่งกรุป S ใด ๆ ถ้า S ไม่มีสมาชิกเอกลักษณ์ แล้วเราเพิ่มสมาชิก 1 เข้าไปใน S และกำหนด

$$1 \cdot 1 = 1 \text{ และ } 1 \cdot a = a = a \cdot 1 \text{ สำหรับทุก ๆ } a \in S$$

จะเห็นว่า $S \cup \{1\}$ เป็นกึ่งกรุปที่มีสมาชิกเอกลักษณ์ 1 ในที่นี้เราจะใช้สัญลักษณ์ S^1 ซึ่งมีความหมายดังต่อไปนี้

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{ถ้า } S \text{ มีสมาชิกเอกลักษณ์} \\ S \cup \{1\} & \text{ถ้า } S \text{ ไม่มีสมาชิกเอกลักษณ์} \end{cases}$$

บทนิยาม 1.5.17. กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุป และ $a, b \in S$ ความสัมพันธ์สมมูล $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ และ $\mathcal{J}$ บน S นิยามดังต่อไปนี้

(1) $a\mathcal{L}b$ ก็ต่อเมื่อ $S^1a = S^1b$; นั่นคือ มี $x, y \in S^1$ โดยที่ $a = xb$ และ $b = ya$

(2) $a\mathcal{R}b$ ก็ต่อเมื่อ $aS^1 = bS^1$; นั่นคือ มี $x, y \in S^1$ โดยที่ $a = bx$ และ $b = ay$

(3) $a\mathcal{J}b$ ก็ต่อเมื่อ $S^1aS^1 = S^1bS^1$; นั่นคือ $x, y, u, v \in S^1$ โดยที่ $a = xby$ และ $b = uav$

(4) $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ และ $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$

ความสัมพันธ์ $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{D}$ และ $\mathcal{J}$ เรียกว่า*ความสัมพันธ์กรีน* (Green's relations) บน S สำหรับ $a \in S$ เขียนแทนชั้นสมมูล $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{D}$ และ $\mathcal{J}$ ที่บรรจุ a ด้วยสัญลักษณ์ L_a, R_a, H_a, D_a และ J_a ตามลำดับ และเราจะเรียกเซต S^1a, aS^1 และ S^1aS^1 ว่า*ไอดีลซ้ายมุขสำคัญ* (principal left ideal) *ไอดีลขวามุขสำคัญ* (principal right ideal) และ *ไอดีลมุขสำคัญ* (principal ideal) ที่ก่อกำเนิดโดย a ตามลำดับ

กำหนดให้ I เป็นไอดีลแท้ของกึ่งกรุป S สำหรับ $a, b \in S$

$$a \, \rho_I \, b \text{ ก็ต่อเมื่อ } a, b \in I \text{ หรือ } a = b$$

สามารถแสดงได้ว่า ρ_I เป็นสมภาค และเรียกว่า*สมภาครีส์* (Rees congruence) *กึ่งกรุปผลหารรีส์* (Rees quotient semigroup) คือ $S/\rho_I = \{I\} \cup \{\{x\} : x \in S \setminus I\}$

ให้ a เป็นสมาชิกของกึ่งกรุป S กำหนดให้ $J(a) = S^1aS^1$ เป็นไอดีลมุขสำคัญของ S ที่ก่อกำเนิดโดย a และให้ J_a แทนชั้นสมมูล $\mathcal{J}$ ที่บรรจุ a จะเห็นว่า $J_a \subseteq J(a)$ กำหนดให้ $I(a) = J(a) \setminus J_a$ ถ้า $I(a) \neq \emptyset$ แล้ว $I(a)$ เป็นไอดีลของ $J(a)$ เราเขียนแทนกึ่งกรุปผลหารรีส์ $J(a)/\rho_{I(a)}$ ด้วย $J(a)/I(a)$ และเรียกว่า*ตัวประกอบมุขสำคัญ* (principal factor) ของ S

ต่อไปจะกล่าวถึงบทนิยามที่เกี่ยวข้องกับปริภูมิเวกเตอร์

บทนิยาม 1.5.18. *ฟีลด์* (field) F คือเซต $F \neq \emptyset$ ภายใต้การดำเนินการบวก $+\colon F \times F \to F$ และการคูณ $\cdot\colon F \times F \to F$ ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $(F, +)$ เป็นอาบีเลียนกรุป

(2) $(F, \cdot)$ เป็นเป็นโมนอยด์ที่มี $1 \neq 0$ เป็นเอกลักษณ์การคูณใน F

(3) ถ้า $a, b, c \in F$ แล้ว $a(b + c) = ab + ac$ และ $(a + b)c = ac + bc$

(4) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ เป็นอาบีเลียนกรุป

แต่ละสมาชิกใน V เรียกว่า *เวกเตอร์* (vector) และ เรียกสมาชิกในฟีลด์ F ว่า *สเกลาร์* (scalars)

บทนิยาม 1.5.19. *ปริภูมิเวกเตอร์* (vector space) V *เหนือฟีลด์* F คือเซต V ภายใต้การดำเนินการบวก $+\colon V \times V \to V$ และการคูณด้วยสเกลาร์ $\cdot\colon F \times V \to V$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข: สำหรับทุก ๆ $u, v, w \in V$ และ $a, b, 1 \in F$,

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(2) $u + v = v + u$

(3) มีสมาชิก $0 \in V$ โดยที่ $u + 0 = u$

(4) สำหรับแต่ละ $u \in V$ จะมีสมาชิก $-u \in V$ ซึ่ง $u + (-u) = 0$

(5) $(ab)u = a(bu)$

(6) $a(u + v) = au + av$

(7) $(a + b)u = au + bu$

(8) $1u = u$

แต่ละสมาชิกใน V เรียกว่า *เวกเตอร์* (vector) และ เรียกสมาชิกในฟีลด์ F ว่า *สเกลาร์* (scalars)

บทนิยาม 1.5.20. กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $\emptyset \neq W \subseteq V$ เรียก W ว่า*ปริภูมิย่อย* (subspace) ของ V ถ้า W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ภายใต้การดำเนินการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ของ V

บทนิยาม 1.5.21. กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ $\emptyset \neq S \subseteq V$ *การรวมเชิงเส้น* (linear combination) ของเวกเตอร์ใน S คือนิพจน์ที่อยู่ในรูป

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n$$

ที่ซึ่ง $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$ และ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ เรียก $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ว่า *สัมประสิทธิ์* (coefficient) ของการรวมเชิงเส้น

บทนิยาม 1.5.22. *ปริภูมิย่อยที่แผ่ทั่ว* (subspace spanned) หรือ *ปริภูมิย่อยที่ก่อกำเนิด* (subspace generated) โดย S คือเซตของการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S นั่นคือ

$$\langle S \rangle = \{a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n : a_i \in F \text{ และ } s_i \in S\}$$

เป็นที่รู้กันดีว่า $\langle S \rangle$ เป็นปริภูมิย่อยที่เล็กที่สุดของ V ที่บรรจุ S และถ้า $V = \langle S \rangle$ แล้ว V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่ก่อกำเนิดโดย S หรือเรียกว่า S แผ่ทั่ว V

บทนิยาม 1.5.23. กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ $\emptyset \neq S \subseteq V$ จะเรียก S ว่าเป็น*อิสระเชิงเส้น* (linearly independent) ถ้าสำหรับเวกเตอร์ที่แตกต่างกัน $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$ และ สเกลาร์ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = 0 \;\Rightarrow\; a_i = 0 \text{ สำหรับทุก ๆ } i$$

บทนิยาม 1.5.24. กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ $\emptyset \neq S \subseteq V$ จะเรียก S ว่าเป็น*ฐานหลัก* (basis) ถ้า S เป็นอิสระเชิงเส้น และ $\langle S \rangle = V$

ยิ่งไปกว่านั้น เราทราบว่าทุกปริภูมิเวกเตอร์จะมีฐานหลักเสมอ และสองฐานหลักใด ๆ ของปริภูมิเวกเตอร์ V จะมีจำนวนเชิงการนับ (cardinality) เท่ากัน ทำให้ได้บทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.5.25. *มิติ* (dimension) หรือ *แรงก์* (rank) ของปริภูมิเวกเตอร์ V คือจำนวนเชิงการนับของฐานหลักใด ๆ ใน V ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\dim(V)$

หมายเหตุ 1.5.1. ปริภูมิศูนย์ $\{0\} = \langle\emptyset\rangle$ และ $\dim(\{0\}) = 0$ ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $S \subseteq V$ เป็นอิสระเชิงเส้น แล้ว $0 \notin S$

บทนิยาม 1.5.26. กำหนดให้ W_1 และ W_2 เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V *ผลบวก* (sum) ของ W_1 และ W_2 ถูกนิยามโดย

$$W_1 + W_2 = \{u + w : u \in W_1 \text{ และ } w \in W_2\}$$

ปริภูมิเวกเตอร์ V เรียกว่า *ผลบวกตรง* (direct sum) ของ W_1 และ W_2 ถ้า $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ และ $W_1 + W_2 = V$ ผลบวกตรงของ W_1 และ W_2 เขียนแทนด้วย

$$V = W_1 \oplus W_2$$

หมายเหตุ 1.5.2. ถ้า α และ β เป็นฟังก์ชันจากปริภูมิเวกเตอร์ V ไปยังปริภูมิเวกเตอร์ U แล้ว $\alpha \circ \beta$ นิยามโดย

$$v(\alpha \circ \beta) = (v\alpha)\beta \text{ สำหรับทุก ๆ } v \in V$$

บทนิยาม 1.5.27. กำหนดให้ V และ U เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F ฟังก์ชัน $\alpha : V \to U$ เรียกว่า*การแปลงเชิงเส้น* (linear transformation) ถ้า

$$(u + v)\alpha = u\alpha + v\alpha \text{ และ } (au)\alpha = a(u\alpha)$$

หรือสมมูลกับ

$$(au + bv)\alpha = a(u\alpha) + b(v\alpha)$$

สำหรับทุก ๆ สเกลาร์ $a, b \in F$ และ เวกเตอร์ $u, v \in V$ เซตของการแปลงเชิงเส้นทั้งหมดจาก V ไปยัง U เขียนแทนด้วย $\mathcal{L}(V, U)$

บทนิยาม 1.5.28. กำหนดให้ V และ U เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F

(1) ถ้า $\alpha \in \mathcal{L}(V, U)$ แล้ว *เคอร์เนล* (kernel) ของ α คือ

$$\ker \alpha = \{v \in V : v\alpha = 0\}$$

(2) ถ้า $\alpha \in \mathcal{L}(V, U)$ และ $v \in V$ แล้วเรียก $v\alpha$ ว่า*ภาพ* (image) ของ v ภายใต้ α และเขียนแทนเซตของภาพทั้งหมดของ α ด้วย

$$V\alpha = \{v\alpha \in U : v \in V\}$$

หมายเหตุ 1.5.3. กำหนดให้ $\alpha \in \mathcal{L}(V, U)$ แล้วแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

(1) $V\alpha$ เป็นปริภูมิย่อยของ U และ $\ker \alpha$ เป็นปริภูมิย่อยของ V

(2) $0_V\alpha = 0_U$ ที่ซึ่ง 0_V และ 0_U คือเวกเตอร์ศูนย์ใน V และ U ตามลำดับ

(3) ถ้า $\ker \alpha = V$ แล้ว α เรียกว่า*การส่งศูนย์* (zero map) บน V

บทนิยาม 1.5.29. กำหนดให้ V และ U เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F การแปลงเชิงเส้น $\alpha\colon V \to U$ เรียกว่า*สมสัณฐาน* (isomorphism) จาก V ไป U ถ้า α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก V ไปทั่วถึง U และถ้ามีสมสัณฐานจาก V ไป U แล้วจะเรียกว่า V และ U *สมสัณฐานกัน* (isomorphic) โดยจะเขียนแทนด้วย $V \cong U$

บทนิยาม 1.5.30. กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F การแปลงเชิงเส้นจาก V ไป V เรียกว่า*การดำเนินการเชิงเส้น* (linear operator) บน V เซตของการดำเนินการเชิงเส้นทั้งหมดบน V เขียนแทนด้วย

$$\mathcal{L}(V) \quad \text{หรือ} \quad T(V)$$

นั่นคือ $\mathcal{L}(V, V) = \mathcal{L}(V) = T(V)$

เราทราบว่า $T(V)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติภายใต้การประกอบของฟังก์ชันจากปริภูมิเวกเตอร์ V ไปยัง V [6, หน้า 63]

1.6 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

ได้องค์ความรู้ใหม่ในวิชาคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะทางด้านพีชคณิตนามธรรม ปริภูมิเวกเตอร์และกึ่งกรุปการแปลง