

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในบทนี้ เราจะพิสูจน์เงื่อนไขที่ทำให้สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มีผลเฉลยที่เป็นบวก และมีผลเฉลยที่เป็นลบ โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับตัวหารร่วมมาก และผลรวมเชิงเส้นของตัวหารร่วมมากนั้น นอกจากนี้จะมีการยกตัวอย่างประกอบการใช้ทฤษฎีบทที่พิสูจน์ได้ ประกอบกับการวาดกราฟให้เห็นเป็นรูปธรรมถึงการมี หรือไม่มีผลเฉลยที่สนใจดังกล่าว

4.1 ผลเฉลยที่เป็นบวกของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร

ในส่วนนี้จะพิสูจน์เงื่อนไขที่ทำให้สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มีผลเฉลยที่เป็นบวก โดยพิจารณาแยกเป็น 4 กรณีทั้งหมดที่แตกต่างกัน ดังนี้

- 1) $a, b > 0$
- 2) $a > 0, b < 0$
- 3) $a, b < 0$
- 4) $a < 0, b > 0$

โดยทฤษฎีบทหลักที่จะกล่าวถึงทั้งหมดต่อไปนี้ จำนวนเต็ม m และ n จะหมายถึง จำนวนเต็มที่น่ามาเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้น $d = an + bm$ ตามทฤษฎีบทที่ 2.2.2 เมื่อ $(a, b) = d$

ทฤษฎีบทที่ 4.1.1 ให้ $a, b > 0$ สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ จะมีผลเฉลยที่เป็นบวกก็ต่อเมื่อ

$$d \mid c \text{ และ } \left(\frac{dc}{ab} > 1 \text{ หรือ } \left(\frac{dc}{ab} \leq 1 \text{ และ } -\frac{nc}{b} \notin \mathbb{Z} \text{ และ } \left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil < \frac{mc}{a} \right) \right)$$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) ให้สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มีผลเฉลยที่เป็นบวก โดยที่ $a, b > 0$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.2 และ ทฤษฎีบทที่ 2.2.4 จะได้ว่า $d = an + bm \exists n, m \in \mathbb{Z}$ และ $d \mid c$ และโดยทฤษฎีบท 2.2.5 จะได้ ผลเฉลยทั่วไปคือ $x = \frac{nc + bt}{d}$ และ $y = \frac{mc - at}{d}$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$

ต่อมา จากสมมติฐานว่าสมการมีผลเฉลยที่เป็นบวก ดังนั้นจะมีค่า $t \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้

$x = \frac{nc+bt}{d} > 0$ และ $y = \frac{mc-at}{d} > 0$ โดยการแก้สมการทั้งสองประกอบกับการที่ $a, b > 0$

จะได้ว่า $-\frac{nc}{b} < t < \frac{mc}{a}$ จากนั้นพิจารณาแยกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $\frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b}\right) > 1$

เนื่องจาก $d = an + bm$ ดังนั้น $\frac{d}{ab} = \frac{n}{b} + \frac{m}{a}$

จะได้ $\frac{dc}{ab} = \left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right)c = \frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b}\right) > 1$

กรณีที่ 2 ถ้า $\frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b}\right) \leq 1$

ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1 สามารถแสดงได้ว่า $\frac{dc}{ab} \leq 1$

ต่อมามีสมมติ $\frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b}\right) = j$ เมื่อ $0 < j \leq 1$ จะได้ $\frac{mc}{a} = -\frac{nc}{b} + j$

ถ้า $-\frac{nc}{b} \in \mathbb{Z}$ แล้ว จะได้ว่าจำนวนเต็มตัวถัดไป คือ $-\frac{nc}{b} + 1$

ดังนั้น จาก $-\frac{nc}{b} < t < \frac{mc}{a}$ ดังนั้นจะได้ $t \in \left(-\frac{nc}{b}, \frac{mc}{a}\right) = \left(-\frac{nc}{b}, -\frac{nc}{b} + j\right)$ โดยที่

$-\frac{nc}{b} + j \leq -\frac{nc}{b} + 1$ ซึ่งจะเกิดข้อขัดแย้งกับการที่ $t \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $-\frac{nc}{b} \notin \mathbb{Z}$ นอกจากนี้

โดยข้อสังเกตที่ 2.2.7 จะมีจำนวนเต็มเพียงตัวเดียวใน $\left(-\frac{nc}{b}, \frac{mc}{a}\right)$ คือ $\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil$ ดังนั้น

$t = \left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil$ เพราะฉะนั้น $\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil = t < \frac{mc}{a}$ จบการพิสูจน์ในส่วนแรก

($\Leftarrow$) สมมติให้ $d \mid c$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.4 จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มีผล

เฉลย และจากทฤษฎีบท 2.2.8 ทำให้ได้ว่าผลเฉลยทั่วไปคือ $x = \frac{nc+bt}{d}$ และ $y = \frac{mc-at}{d}$ เมื่อ

$t \in \mathbb{Z}$

ถ้า $\frac{dc}{ab} > 1$ แล้ว เช่นเดียวกับการพิสูจน์ในส่วนแรกสามารถจัดรูปสมการได้ว่า

$\frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b}\right) > 1$ ดังนั้น มี $t_1 \in \mathbb{Z}$ ที่ $-\frac{nc}{b} < t_1 < \frac{mc}{a}$

ต่อมาแยกพิจารณาเป็น $-\frac{nc}{b} < t_1$ และ $t_1 < \frac{mc}{a}$ โดยการแก้อสมการทั้งสองจะได้

$nc + bt_1 > 0$ และ $mc - at_1 > 0$ ดังนั้นสมการมีผลเฉลยหนึ่งเป็น $x_0 = \frac{nc + bt_1}{d} > 0$ และ

$$y_0 = \frac{mc - at_1}{d} > 0$$

ในอีกกรณีหนึ่ง ถ้า $\frac{dc}{ab} \leq 1$ และ $-\frac{nc}{b} \notin \mathbb{Z}$ และ $\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil < \frac{mc}{a}$ แล้ว

สมมติ $\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil = t_2 \exists t_2 \in \mathbb{Z}$ จะได้ $-\frac{nc}{b} \leq t_2 < \frac{mc}{a}$ แต่เนื่องจาก $-\frac{nc}{b} \notin \mathbb{Z}$ ดังนั้น

$-\frac{nc}{b} < t_2 < \frac{mc}{a}$ ต่อมาพิจารณา $-\frac{nc}{b} < t_2$ และ $t_2 < \frac{mc}{a}$ โดยการแก้อสมการจะได้

$nc + bt_2 > 0$ และ $mc - at_2 > 0$ ดังนั้นสมการมีผลเฉลยหนึ่งเป็น $x_0 = \frac{nc + bt_2}{d} > 0$ และ

$$y_0 = \frac{mc - at_2}{d} > 0 \quad \text{ทั้งสองกรณีจึงสรุปได้ว่าสมการจะมีผลเฉลยที่เป็นบวก} \quad \square$$

ทฤษฎีบทที่ 4.1.2 ให้ $a > 0, b < 0$ สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$

ถ้า $d \mid c$ แล้ว สมการจะมีผลเฉลยที่เป็นบวกเป็นจำนวนอนันต์

การพิสูจน์ สมมติให้ $d \mid c$ โดยที่ $a > 0, b < 0$

จากนั้นดำเนินการในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในส่วนแรกของทฤษฎีบทที่ 4.1 จะได้

ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $x = \frac{nc + bt}{d}$ และ $y = \frac{mc - at}{d}$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$ (A)

แต่จาก $b < 0$ จะได้ $b = -k \exists k \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้น $x = \frac{nc - kt}{d}$

จากนั้น พิจารณาค่า t ที่ทำให้ x และ y เป็นบวก

$$\text{จะได้} \quad \frac{nc - kt}{d} > 0$$

$$nc - kt > 0$$

$$nc > kt$$

$$\frac{nc}{k} > t \quad \text{(B)}$$

และ
$$\frac{mc - at}{d} > 0$$

$$mc - at > 0$$

$$mc > at$$

$$\frac{mc}{a} > t \quad \text{--- (C)}$$

ค่า t ที่สอดคล้องกับสมการ (B) และ (C) คือค่า t ที่ $t < \min\left\{\frac{nc}{k}, \frac{mc}{a}\right\}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า ค่า t ดังกล่าวจะมีอยู่เป็นจำนวนอนันต์ และเมื่อแทนค่า t แต่ละค่าใน (A) ก็จะได้ผลลัพธ์เป็นบวกของสมการมีเป็นจำนวนอนันต์เช่นกัน $\square$

ทฤษฎีบทที่ 4.1.3 ให้ $a < 0$, $b > 0$ สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$

ถ้า $d \mid c$ แล้ว สมการจะมีผลเฉลยที่เป็นบวกเป็นจำนวนอนันต์

การพิสูจน์ สมมติให้ $d \mid c$ โดยที่ $a < 0$, $b > 0$

จากนั้นดำเนินการในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในส่วนแรกของทฤษฎีบทที่ 4.1 จะได้

ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $x = \frac{nc + bt}{d}$ และ $y = \frac{mc - at}{d}$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$ --- (A)

แต่จาก $a < 0$ จะได้ $a = -k \exists k \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้น $y = \frac{mc + kt}{d}$

จากนั้น พิจารณาค่า t ที่ทำให้ x และ y เป็นบวก

จะได้

$$x = \frac{nc + bt}{d} > 0$$

$$nc + bt > 0$$

$$nc > -bt$$

$$-\frac{nc}{b} < t \quad (\text{เพราะว่า } -b < 0) \quad \text{--- (B)}$$

และให้

$$y = \frac{mc + kt}{d} > 0$$

จะได้

$$mc + kt > 0$$

$$mc > -kt$$

$$-\frac{mc}{k} < t \quad (\text{เพราะว่า } -k < 0) \quad \text{--- (C)}$$

ค่า t ที่สอดคล้องกับสมการ (B) และ (C) คือค่า t ที่ $t > \max \left\{ -\frac{nc}{b}, -\frac{mc}{k} \right\}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า ค่า t ดังกล่าวจะมีอยู่เป็นจำนวนอนันต์ และเมื่อแทนค่า t แต่ละค่าใน (A) ก็จะได้ผลเฉลยที่เป็นบวกของสมการมีเป็นจำนวนอนันต์เช่นกัน $\square$

ทฤษฎีบทที่ 4.1.4 ให้ $a, b < 0$ สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ จะมีผลเฉลยที่เป็นบวกก็ต่อเมื่อ

$$d \mid c \text{ และ } \left(-\frac{dc}{ab} > 1 \text{ หรือ } \left(-\frac{dc}{ab} \leq 1 \text{ และ } \frac{mc}{a} \notin \mathbb{Z} \text{ และ } \left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil < -\frac{nc}{b} \right) \right)$$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) ให้สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มีผลเฉลยที่เป็นบวก โดยที่ $a, b < 0$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.2 และ ทฤษฎีบทที่ 2.2.4 จะได้ว่า $d = an + bm \exists n, m \in \mathbb{Z}$ และ $d \mid c$

และ โดยทฤษฎีบท 2.2.8 จะได้ ผลเฉลยทั่วไปคือ $x = \frac{nc + bt}{d}$ และ $y = \frac{mc - at}{d}$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$

จากสมมติฐานว่าสมการมีผลเฉลยที่เป็นบวก ดังนั้นจะมีค่า $t \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $x, y > 0$

พิจารณาค่า t ดังกล่าว จาก $\frac{nc + bt}{d} > 0$ และ $\frac{mc - at}{d} > 0$ โดยการแก้สมการทั้งสองประกอบ

กับการที่ $a, b < 0$ จะได้ว่า $\frac{mc}{a} < t < -\frac{nc}{b}$ จากนั้นพิจารณาแยกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $-\frac{nc}{b} - \frac{mc}{a} > 1$

เนื่องจาก $d = an + bm$ ดังนั้น $\frac{d}{ab} = \frac{n}{b} + \frac{m}{a}$ จะได้ $-\frac{dc}{ab} = -\frac{nc}{b} - \frac{mc}{a} > 1$

กรณีที่ 2 ถ้า $-\frac{nc}{b} - \frac{mc}{a} \leq 1$ แล้ว เช่นเดียวกันกับกรณี 1 สามารถจัดรูปสมการได้ว่า

$-\frac{dc}{ab} \leq 1$ ต่อมาสมมติ $-\frac{nc}{b} - \frac{mc}{a} = j$ เมื่อ $0 < j \leq 1$ จะได้ $-\frac{nc}{b} = \frac{mc}{a} + j$

ถ้า $\frac{mc}{a} \in \mathbb{Z}$ แล้วจะได้ว่าจำนวนเต็มตัวถัดไป คือ $\frac{mc}{a} + 1$ และจาก $\frac{mc}{a} < t < -\frac{nc}{b}$

ดังนั้นจะได้ $t \in (\frac{mc}{a}, -\frac{nc}{b}) = (\frac{mc}{a}, \frac{mc}{a} + j)$ เมื่อ $\frac{mc}{a} + j \leq \frac{mc}{a} + 1$ ซึ่งจะเกิดข้อขัดแย้งกับการ

ที่ $t \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $\frac{mc}{a} \notin \mathbb{Z}$ นอกจากนี้โดยข้อสังเกตที่ 2.2.7 จะมีจำนวนเต็มเพียงตัวเดียวใน

$(\frac{mc}{a}, -\frac{nc}{b})$ คือ $\left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil$ ดังนั้น จาก $t \in (\frac{mc}{a}, -\frac{nc}{b})$ และ $t \in \mathbb{Z}$ จึงได้ว่า $t = \left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil$

ทำให้ได้ว่า $\left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil < -\frac{nc}{b}$

จึงสรุปได้ว่า $d \mid c$ และ $\left(-\frac{dc}{ab} > 1 \text{ หรือ } \left(-\frac{dc}{ab} \leq 1 \text{ และ } \frac{mc}{a} \notin \mathbb{Z} \text{ และ } \left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil < -\frac{nc}{b} \right) \right)$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $d \mid c$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.4 จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มีผล

เฉลย และทฤษฎีบท 2.2.8 ทำให้ได้ว่าผลเฉลยทั่วไปคือ $x = \frac{nc + bt}{d}$ และ $y = \frac{mc - at}{d}$ เมื่อ

$$t \in \mathbb{Z}$$

ถ้า $-\frac{dc}{ab} > 1$ แล้ว ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ส่วนแรก สามารถแสดงได้ว่า

$$-\frac{nc}{b} - \frac{mc}{a} > 1 \text{ ดังนั้น มี } t_1 \in \mathbb{Z} \text{ ที่ } \frac{mc}{a} < t_1 < -\frac{nc}{b} \text{ ต่อมาพิจารณา } \frac{mc}{a} < t_1 \text{ และ } t_1 < -\frac{nc}{b} \text{ โดย}$$

การแก้อสมการจะได้ $nc + bt_1 > 0$ และ $mc - at_1 > 0$ ดังนั้นสมการมีผลเฉลยหนึ่งเป็น

$$x_0 = \frac{nc + bt_1}{d} > 0 \text{ และ } y_0 = \frac{mc - at_1}{d} > 0$$

ในอีกกรณีหนึ่ง ถ้า $-\frac{dc}{ab} \leq 1$ และ $\frac{mc}{a} \notin \mathbb{Z}$ และ $\left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil < -\frac{nc}{b}$ แล้ว

สมมติ $\left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil = t_2 \exists t_2 \in \mathbb{Z}$ จะได้ $\frac{mc}{a} \leq t_2 < -\frac{nc}{b}$ แต่เนื่องจาก $\frac{mc}{a} \notin \mathbb{Z}$ ดังนั้น

$$\frac{mc}{a} < t_2 < -\frac{nc}{b} \text{ ต่อมาพิจารณา } \frac{mc}{a} < t_2 \text{ และ } t_2 < -\frac{nc}{b} \text{ โดยการแก้อสมการจะได้ } nc + bt_2 > 0$$

$$\text{และ } mc - at_2 > 0 \text{ ดังนั้นสมการมีผลเฉลยหนึ่งเป็น } x_0 = \frac{nc + bt_2}{d} > 0 \text{ และ } y_0 = \frac{mc - at_2}{d} > 0$$

ทั้งสองกรณีจึงสรุปได้ว่าสมการจะมีผลเฉลยที่เป็นบวก

□

ตัวอย่าง 4.1.5 กำหนดสมการ $4x + 10y = 14$ ซึ่ง $(4, 10) = 2$ จะได้ $2 \mid 14$ ดังนั้นสมการ มีผล

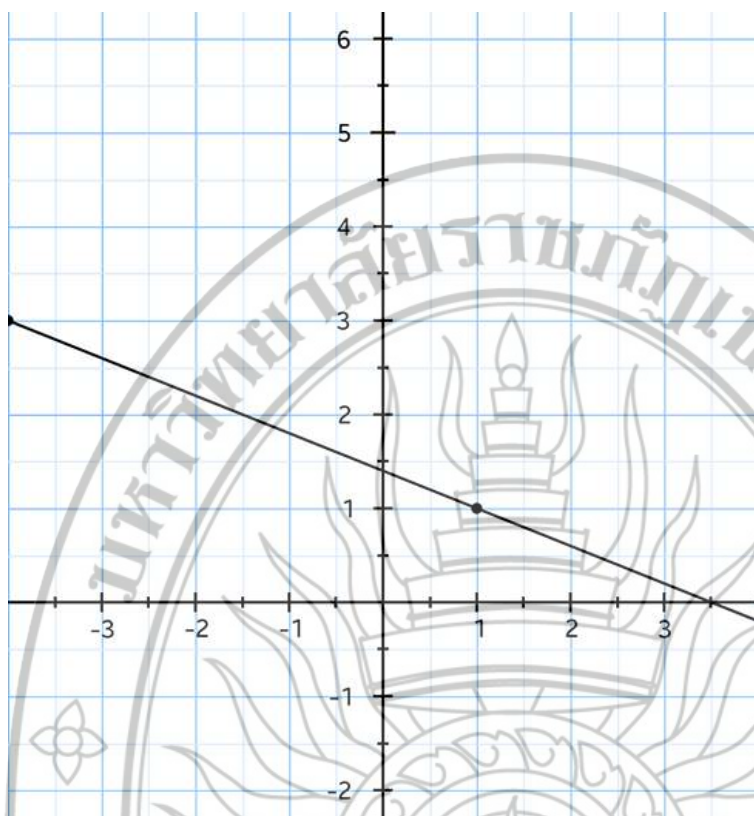
เฉลย ต่อมาพิจารณา $\frac{dc}{ab} = \frac{(2)(14)}{(4)(10)} = 0.7 \leq 1$ และพิจารณาผลรวมเชิงเส้น $2 = 4(-2) + 10(1)$ จะ

$$\text{ได้ } n = -2, m = 1 \text{ ดังนั้น } -\frac{nc}{b} = -\frac{(-2)(14)}{10} = 2.8 \notin \mathbb{Z} \text{ และ } \lceil 2.8 \rceil = 3 < \frac{(1)(14)}{4} = \frac{mc}{a} \text{ ดังนั้น}$$

โดยทฤษฎีบทที่ 4.1.1 สมการ $4x + 10y = 14$ มีผลเฉลยที่เป็นบวก เช่น $x_0 = 1, y_0 = 1$ เป็นผลเฉลย

หนึ่งที่เป็นบวกของสมการ เป็นต้น ดังแสดงได้ตามรูปต่อไปนี้ จะเห็นว่าในจตุรภาคที่ 1 เส้นตรงของ

สมการนี้ผ่านจุด $(1, 1)$



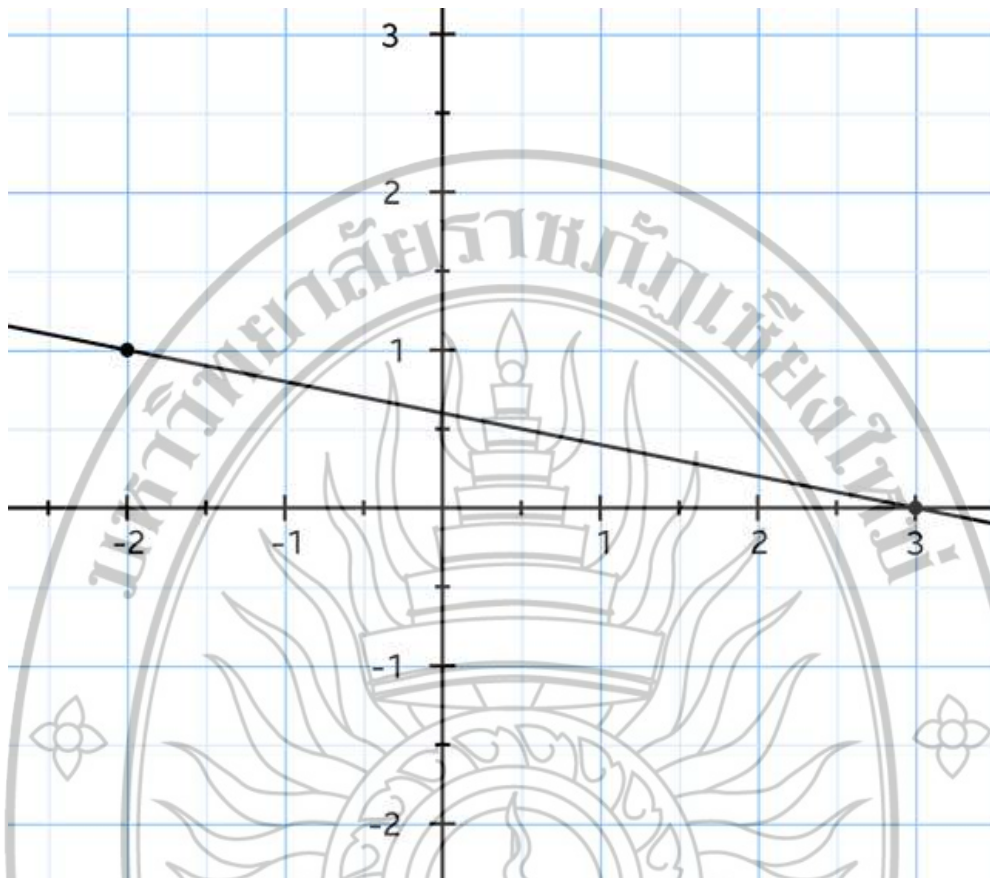
ภาพที่ 4.1 แสดงกราฟสมการ $4x + 10y = 14$

ตัวอย่าง 4.1.6 กำหนดสมการ $3x + 15y = 9$ จะได้ว่า $(3, 15) = 3$ และ $3 \mid 9$ ดังนั้นสมการมีผลเฉลย

ต่อมา พิจารณา $\frac{dc}{ab} = \frac{(3)(9)}{(3)(15)} = 0.6 \leq 1$ และพิจารณาผลรวมเชิงเส้น $3 = 3(1) + 15(0)$ จะได้

$n = 1, m = 0$ ดังนั้น $-\frac{nc}{b} = -\frac{(1)(9)}{15} = -0.6 \notin \mathbb{Z}$ แต่ $\lceil -0.6 \rceil = 0$ ซึ่ง $\frac{mc}{a} = \frac{(0)(9)}{3} = 0$

จึงไม่เป็นไปตามทฤษฎีบทที่ 4.1.1 ดังนั้น สมการ $3x + 15y = 9$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นบวก ดังแสดงได้ตามรูปต่อไปนี้ จะเห็นว่าในจตุรภาคที่ 1 เส้นตรง (x, y) ที่เป็นบวกใดๆเลย

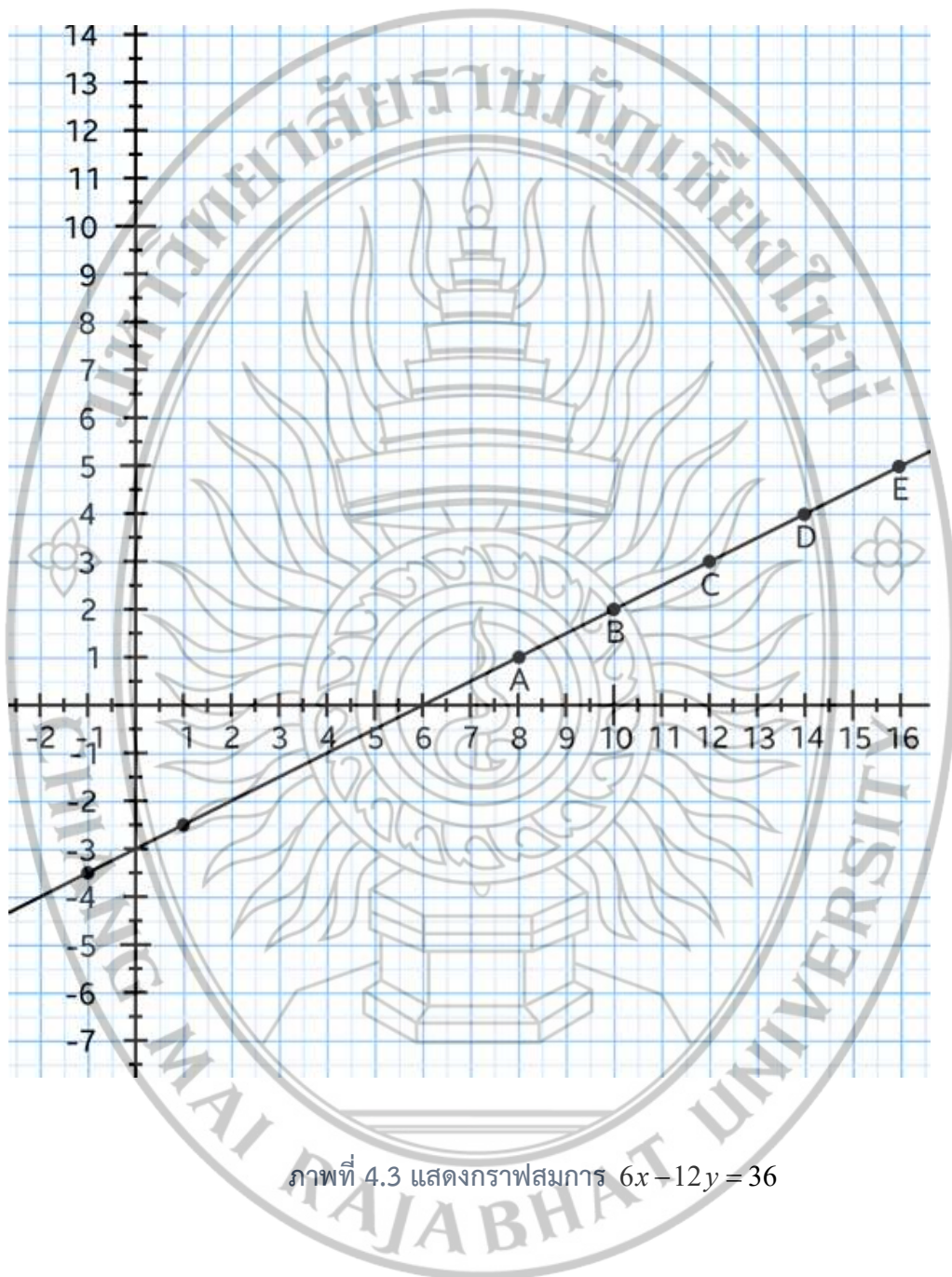


ภาพที่ 4.2 แสดงกราฟสมการ $3x + 15y = 9$

ตัวอย่าง 4.1.7 กำหนดสมการ $6x - 12y = 36$ ซึ่ง $(6, 12) = 6$ จะได้ $6 \mid 36$ ดังนั้นสมการมี ผลเฉลย นั่นคือจากทฤษฎีบทที่ 4.1.2 เราสามารถสรุปได้ว่าสมการจะมีผลเฉลยที่เป็นบวกเป็นจำนวนอนันต์ ต่อมาลองตรวจสอบความถูกต้อง โดยพิจารณาผลรวมเชิงเส้น $6 = 6(1) + 12(0)$ ดังนั้น $n = 1, m = 0$ จะได้ $x = \frac{(1)(36) - 12t}{6} = 6 - 2t$ และ $y = \frac{(0)(36) - 6t}{6} = -t$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ ต่อมาพิจารณาค่า t ที่ทำให้ $x, y > 0$ จะได้ $6 - 2t > 0$ และ $-t > 0$ โดยเมื่อแก้สมการแล้วจะได้ $t < \min\{3, 0\} = 0$ ซึ่งมีเป็นจำนวนอนันต์

เช่น ถ้า $t = -1$ จะได้ $x = 8$ และ $y = 1$ เป็นผลเฉลยที่เป็นบวกของสมการ
(เพราะว่า $6(8) - 12(1) = 36$)
ถ้า $t = -2$ จะได้ $x = 10$ และ $y = 2$ เป็นผลเฉลยที่เป็นบวกของสมการ
(เพราะว่า $6(10) - 12(2) = 36$) เป็นต้น

ดังแสดงได้ตามรูปต่อไปนี้ จะเห็นว่าในจตุรภาคที่ 1 เส้นตรงผ่านคู่อันดับที่เป็นบวกมากมาย เช่นจุด $A = (8,1), B = (10,2), C = (12,3), D = (14,4), E = (16,5)$ เป็นต้น

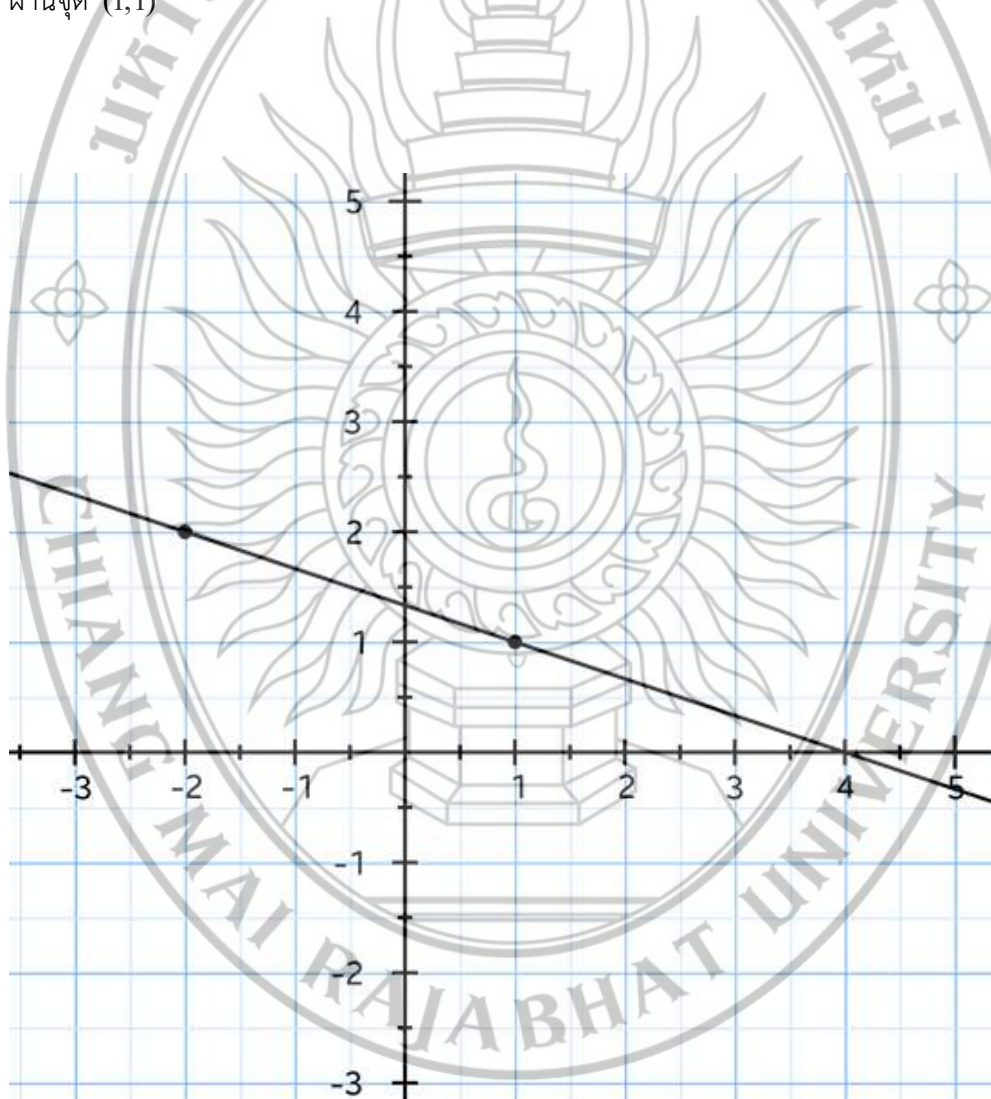


ตัวอย่าง 4.1.8 กำหนดสมการ $-5x - 15y = -20$ ซึ่ง $(-5, -15) = 5$ จะได้ $5 \mid -20$ ดังนั้นสมการมีผลเฉลย ต่อมาพิจารณา $-\frac{dc}{ab} = -\frac{(2)(-20)}{(-5)(-15)} \approx 0.53 < 1$

และพิจารณาผลรวมเชิงเส้น $5 = (-5)(-4) + (-15)(1)$ จะได้ $n = -4, m = 1$ ดังนั้น

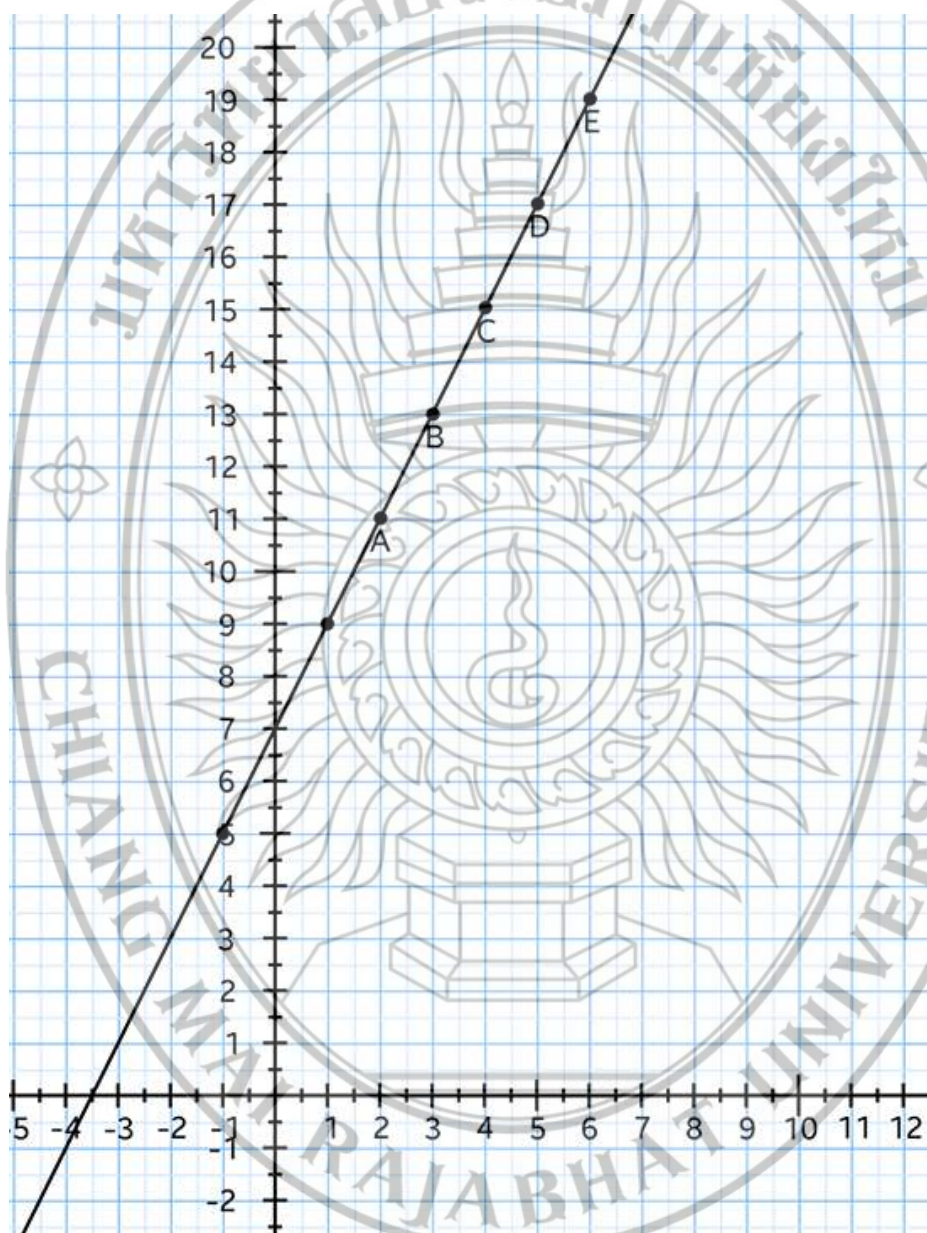
$$-\frac{nc}{b} = -\frac{(-4)(-20)}{-15} \approx 5.33 \text{ และ } \left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil = \left\lceil \frac{-20}{-5} \right\rceil = 4 < 5.33 = -\frac{nc}{b} \text{ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่}$$

4.1.4 สมการ $-5x - 15y = -20$ มีผลเฉลยที่เป็นบวก เช่น $x_0 = 1, y_0 = 1$ เป็นผลเฉลยหนึ่งที่เป็นบวกของสมการ เป็นต้น ดังแสดงได้ตามรูปต่อไปนี้ จะเห็นว่าในจตุรภาคที่ 1 เส้นตรงของสมการนี้ผ่านจุด $(1, 1)$



ภาพที่ 4.4 แสดงกราฟสมการ $-5x - 15y = -20$

ตัวอย่าง 4.1.9 กำหนดสมการ $-4x + 2y = 14$ จะได้ว่า $(-4, 2) = 2$ และ $2 \mid 14$ ดังนั้นสมการมีผลเฉลยที่เป็นบวกเป็นจำนวนอนันต์ ดังแสดงได้ตามรูปต่อไปนี้ จะเห็นว่าในจตุรภาคที่ 1 เส้นตรงผ่านคู่อันดับที่เป็นบวกมากมาย เช่นจุด $A = (1, 11), B = (2, 13), C = (3, 15), D = (4, 17), E = (5, 19)$ เป็นต้น



ภาพที่ 4.5 แสดงกราฟสมการ $-4x + 2y = 14$

4.2 ผลเฉลยที่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร

ในส่วนนี้จะพิสูจน์เงื่อนไขที่ทำให้สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มีผลเฉลยที่เป็นลบ โดยการพิสูจน์ในส่วนนี้จะใช้แนวทางเดียวกันกับการหาเงื่อนไขที่ทำให้สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มีผลเฉลยที่เป็นบวกตามหัวข้อ 4.1 โดยเราจะพิจารณาแยกเป็น 4 กรณีทั้งหมดที่แตกต่างกัน ดังนี้

- 1) $a, b > 0$
- 2) $a > 0, b < 0$
- 3) $a < 0, b < 0$
- 4) $a < 0, b > 0$

เช่นเดียวกับกับในหัวข้อ 4.1 ทฤษฎีบทหลักที่จะกล่าวถึงทั้งหมดต่อไปนี้ จำนวนเต็ม m และ n จะหมายถึงจำนวนเต็มที่น่ามาเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้น $d = an + bm$ เมื่อ $(a, b) = d$

ทฤษฎีบทที่ 4.2.1 ให้ $a, b > 0$ สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ จะมีผลเฉลยที่เป็นลบก็ต่อเมื่อ

$$d \mid c \text{ และ } \left(-\frac{dc}{ab} > 1 \text{ หรือ } \left(-\frac{dc}{ab} \leq 1 \text{ และ } \frac{mc}{a} \notin \mathbb{Z} \text{ และ } \left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil < -\frac{nc}{b} \right) \right)$$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) ให้สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มีผลเฉลยที่เป็นลบ โดยที่ $a, b > 0$

โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.4 และโดยทฤษฎีบท 2.2.8 จะได้ ผลเฉลยทั่วไปคือ $x = \frac{nc + bt}{d}$ และ

$$y = \frac{mc - at}{d} \text{ เมื่อ } t \in \mathbb{Z}$$

จากสมมติฐานว่าสมการมีผลเฉลยที่เป็นลบ ดังนั้นจะมีค่า $t \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $x, y < 0$

พิจารณาค่า t ดังกล่าว จาก $\frac{nc + bt}{d} < 0$ และ $\frac{mc - at}{d} < 0$ โดยการแก้สมการทั้งสองประกอบกับ

การที่ $a, b > 0$ จะได้ว่า $\frac{mc}{a} < t < -\frac{nc}{b}$ จากนั้นพิจารณาแยกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $-\frac{nc}{b} - \frac{mc}{a} > 1$

เนื่องจาก $d = an + bm$ ดังนั้น $\frac{d}{ab} = \frac{n}{b} + \frac{m}{a}$ จึงได้ว่า $-\frac{dc}{ab} = -\frac{nc}{b} - \frac{mc}{a} > 1$

กรณีที่ 2 ถ้า $-\frac{nc}{b} - \frac{mc}{a} \leq 1$ แล้ว เช่นเดียวกันกับกรณี 1 สามารถจัดรูปอสมการได้ว่า

$$-\frac{dc}{ab} \leq 1 \text{ ต่อมาสมมติ } -\frac{nc}{b} - \frac{mc}{a} = j \text{ เมื่อ } 0 < j \leq 1 \text{ จะได้ } -\frac{nc}{b} = \frac{mc}{a} + j$$

ถ้า $\frac{mc}{a} \in \mathbb{Z}$ แล้วจะได้ว่าจำนวนเต็มตัวถัดไป คือ $\frac{mc}{a} + 1$ และจาก $\frac{mc}{a} < t < -\frac{nc}{b}$

ดังนั้นจะได้ $t \in (\frac{mc}{a}, -\frac{nc}{b}) = (\frac{mc}{a}, \frac{mc}{a} + j)$ เมื่อ $\frac{mc}{a} + j \leq \frac{mc}{a} + 1$ ซึ่งจะเกิดข้อขัดแย้งกับการ

ที่ $t \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $\frac{mc}{a} \notin \mathbb{Z}$ นอกจากนี้โดยข้อสังเกตที่ 2.2.7 จะมีจำนวนเต็มเพียงตัวเดียวใน

$(\frac{mc}{a}, -\frac{nc}{b})$ คือ $\left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil$ ดังนั้น จาก $t \in (\frac{mc}{a}, -\frac{nc}{b})$ และ $t \in \mathbb{Z}$ จึงได้ว่า $t = \left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil$

ทำให้ได้ว่า $\left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil < -\frac{nc}{b}$

จึงสรุปได้ว่า $d \mid c$ และ $\left(-\frac{dc}{ab} > 1 \text{ หรือ } \left(-\frac{dc}{ab} \leq 1 \text{ และ } \frac{mc}{a} \notin \mathbb{Z} \text{ และ } \left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil < -\frac{nc}{b} \right) \right)$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $d \mid c$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.4 จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มีผลเฉลย และทฤษฎีบท 2.2.8 ทำให้ได้ว่าผลเฉลยทั่วไปคือ $x = \frac{nc + bt}{d}$ และ $y = \frac{mc - at}{d}$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$

ถ้า $-\frac{dc}{ab} > 1$ แล้ว ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในส่วนแรก สามารถแสดงได้ว่า

$-\frac{nc}{b} - \frac{mc}{a} > 1$ ดังนั้น มี $t_1 \in \mathbb{Z}$ ที่ $\frac{mc}{a} < t_1 < -\frac{nc}{b}$ ต่อมาพิจารณา $\frac{mc}{a} < t_1$ และ $t_1 < -\frac{nc}{b}$ โดย

การแก้สมการจะได้ $nc + bt_1 < 0$ และ $mc - at_1 < 0$ ดังนั้นสมการมีผลเฉลยหนึ่งเป็น

$$x_0 = \frac{nc + bt_1}{d} < 0 \text{ และ } y_0 = \frac{mc - at_1}{d} < 0$$

ในอีกกรณีหนึ่ง ถ้า $-\frac{dc}{ab} \leq 1$ และ $\frac{mc}{a} \notin \mathbb{Z}$ และ $\left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil < -\frac{nc}{b}$ แล้ว

สมมติ $\left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil = t_2 \exists t_2 \in \mathbb{Z}$ จะได้ $\frac{mc}{a} \leq t_2 < -\frac{nc}{b}$ แต่เนื่องจาก $\frac{mc}{a} \notin \mathbb{Z}$ ดังนั้น

$\frac{mc}{a} < t_2 < -\frac{nc}{b}$ ต่อมาพิจารณา $\frac{mc}{a} < t_2$ และ $t_2 < -\frac{nc}{b}$ โดยการแก้สมการจะได้ $nc + bt_2 < 0$

และ $mc - at_2 < 0$ ดังนั้นสมการมีผลเฉลยหนึ่งเป็น $x_0 = \frac{nc + bt_2}{d} < 0$ และ $y_0 = \frac{mc - at_2}{d} < 0$

ทั้งสองกรณีจึงสรุปได้ว่าสมการจะมีผลเฉลยที่เป็นลบ

□

ทฤษฎีบทที่ 4.2.2 ให้ $a > 0, b < 0$ สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$

ถ้า $d \mid c$ แล้ว สมการจะมีผลเฉลยที่เป็นลบเป็นจำนวนอนันต์

การพิสูจน์ สมมติให้ $d \mid c$ โดยที่ $a > 0, b < 0$

จากนั้นดำเนินการในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในส่วนแรกของทฤษฎีบทที่ 4.2.1 จะได้ ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $x = \frac{nc + bt}{d}$ และ $y = \frac{mc - at}{d}$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$ (A)

แต่จาก $b < 0$ จะได้ $b = -k \exists k \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้น $x = \frac{nc - kt}{d}$

จากนั้น พิจารณาค่า t ที่ทำให้ x และ y เป็นลบ

ให้
$$\frac{nc - kt}{d} < 0$$

จะได้
$$nc - kt < 0$$

$$nc < kt$$

$$\frac{nc}{k} < t \quad \text{(B)}$$

และให้
$$\frac{mc - at}{d} < 0$$

จะได้
$$mc - at < 0$$

$$mc < at$$

$$\frac{mc}{a} < t \quad \text{(C)}$$

ค่า t ที่สอดคล้องกับสมการ (B) และ (C) คือค่า t ที่ $t > \max \left\{ \frac{nc}{k}, \frac{mc}{a} \right\}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า ค่า t

ดังกล่าวจะมีอยู่เป็นจำนวนอนันต์ และเมื่อแทนค่า t แต่ละค่าใน (A) ก็จะได้ผลให้

ผลเฉลยที่เป็นลบของสมการมีเป็นจำนวนอนันต์เช่นกัน □

ทฤษฎีบทที่ 4.2.3 ให้ $a < 0, b > 0$ สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$

ถ้า $d \mid c$ แล้ว สมการจะมีผลเฉลยที่เป็นลบเป็นจำนวนอนันต์

การพิสูจน์ สมมติให้ $d \mid c$ โดยที่ $a < 0, b > 0$

จากนั้นดำเนินการในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในส่วนแรกของทฤษฎีบทที่ 4.2.1 จะได้ ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $x = \frac{nc+bt}{d}$ และ $y = \frac{mc-at}{d}$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$ (A)

แต่จาก $a < 0$ จะได้ $a = -k \exists k \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้น $y = \frac{mc+kt}{d}$

จากนั้น พิจารณาค่า t ที่ทำให้ x และ y เป็นลบ

ให้
$$x = \frac{nc+bt}{d} < 0$$

จะได้
$$nc+bt < 0$$

$$nc < -bt$$

$$-\frac{nc}{b} > t \quad (\text{เพราะว่า } -b < 0) \quad \text{(B)}$$

และให้
$$y = \frac{mc+kt}{d} < 0$$

จะได้
$$mc+kt < 0$$

$$mc < -kt$$

$$-\frac{mc}{k} > t \quad (\text{เพราะว่า } -k < 0) \quad \text{(C)}$$

ค่า t ที่สอดคล้องกับสมการ (B) และ (C) คือค่า t ที่ $t < \min\left\{-\frac{nc}{b}, -\frac{mc}{k}\right\}$ ซึ่งจะเห็นว่า ค่า t

ดังกล่าวจะมีอยู่เป็นจำนวนอนันต์ และเมื่อแทนค่า t แต่ละค่าใน (A) ก็จะได้ผลเฉลยที่เป็นลบของสมการมีเป็นจำนวนอนันต์เช่นกัน □

ทฤษฎีบทที่ 4.2.4 ให้ $a, b < 0$ สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ จะมีผลเฉลยที่เป็นลบก็ต่อเมื่อ

$$d \mid c \text{ และ } \left(\frac{dc}{ab} > 1 \text{ หรือ } \left(\frac{dc}{ab} \leq 1 \text{ และ } -\frac{nc}{b} \notin \mathbb{Z} \text{ และ } \left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil < \frac{mc}{a} \right) \right)$$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) ให้สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มีผลเฉลยที่เป็นลบ โดยที่ $a, b < 0$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.4 จะได้ว่า $d \mid c$ และโดยทฤษฎีบท 2.2.8 จะได้ ผลเฉลยทั่วไปคือ $x = \frac{nc + bt}{d}$ และ $y = \frac{mc - at}{d}$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$

จากสมมติฐานว่าสมการมีผลเฉลยที่เป็นลบดังนั้นมีค่า $t \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $x, y < 0$

พิจารณาค่า t ดังกล่าว จาก $\frac{nc + bt}{d} < 0$ และ $\frac{mc - at}{d} < 0$ โดยการแก้สมการทั้งสองประกอบกับ

การที่ $a, b < 0$ จะได้ว่า $-\frac{nc}{b} < t < \frac{mc}{a}$ จากนั้นพิจารณาแยกเป็น 2 กรณีดังนี้

$$\text{กรณีที่ 1 } \frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b}\right) > 1$$

เนื่องจาก $d = an + bm$ ดังนั้น $\frac{d}{ab} = \frac{n}{b} + \frac{m}{a}$ จะได้ $\frac{dc}{ab} = \frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b}\right) > 1$

กรณีที่ 2 ถ้า $\frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b}\right) \leq 1$ แล้ว เช่นเดียวกันกับกรณี 1 สามารถจัดรูปสมการได้เป็น

$$\frac{dc}{ab} \leq 1 \text{ ต่อมาสมมติ } \frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b}\right) = j \text{ เมื่อ } 0 < j \leq 1 \text{ จะได้ } \frac{mc}{a} = -\frac{nc}{b} + j$$

ถ้า $-\frac{nc}{b} \in \mathbb{Z}$ แล้วจะได้ว่าจำนวนเต็มตัวถัดไป คือ $-\frac{nc}{b} + 1$ และจาก $-\frac{nc}{b} < t < \frac{mc}{a}$ ดังนั้นจะได้

$$t \in \left(-\frac{nc}{b}, \frac{mc}{a}\right) = \left(-\frac{nc}{b}, -\frac{nc}{b} + j\right) \text{ เมื่อ } -\frac{nc}{b} + j \leq -\frac{nc}{b} + 1 \text{ ซึ่งจะเกิดข้อขัดแย้งกับการที่ } t \in \mathbb{Z}$$

ดังนั้น $-\frac{nc}{b} \notin \mathbb{Z}$ นอกจากนี้โดยข้อสังเกตที่ 2.2.7 จะมีจำนวนเต็มเพียงตัวเดียวใน $\left(-\frac{nc}{b}, \frac{mc}{a}\right)$ คือ

$$\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil \text{ ดังนั้น จาก } t \in \left(-\frac{nc}{b}, \frac{mc}{a}\right) \text{ และ } t \in \mathbb{Z} \text{ จึงได้ว่า } t = \left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil \text{ ทำให้ได้ว่า } \left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil < \frac{mc}{a}$$

$$\text{จึงสรุปได้ว่า } d \mid c \text{ และ } \left(\frac{dc}{ab} > 1 \text{ หรือ } \left(\frac{dc}{ab} \leq 1 \text{ และ } -\frac{nc}{b} \notin \mathbb{Z} \text{ และ } \left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil < \frac{mc}{a}\right)\right)$$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $d \mid c$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.4 จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มีผล

เฉลย และทฤษฎีบท 2.2.8 ทำให้ได้ว่าผลเฉลยทั่วไปคือ $x = \frac{nc + bt}{d}$ และ $y = \frac{mc - at}{d}$ เมื่อ

$t \in \mathbb{Z}$

ถ้า $\frac{dc}{ab} > 1$ แล้ว (เนื่องจาก $d = an + bm$ ดังนั้น $\frac{d}{ab} = \frac{n}{b} + \frac{m}{a}$) เราสามารถจัดรูปสมการได้

เป็น $\frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b}\right) > 1$ ดังนั้น มี $t_1 \in \mathbb{Z}$ ที่ $-\frac{nc}{b} < t_1 < \frac{mc}{a}$ ต่อมาพิจารณา $-\frac{nc}{b} < t_1$ และ

$t_1 < \frac{mc}{a}$ โดยการแก้สมการจะได้ $nc + bt_1 < 0$ และ $mc - at_1 < 0$ ดังนั้นสมการมีผลเฉลยหนึ่งเป็น

$$x_0 = \frac{nc + bt_1}{d} < 0 \text{ และ } y_0 = \frac{mc - at_1}{d} < 0$$

ในอีกกรณีหนึ่ง ถ้า $\frac{dc}{ab} \leq 1$ และ $-\frac{nc}{b} \notin \mathbb{Z}$ และ $\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil < \frac{mc}{a}$ แล้ว

สมมติ $\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil = t_2 \exists t_2 \in \mathbb{Z}$ จะได้ $-\frac{nc}{b} \leq t_2 < \frac{mc}{a}$ แต่เนื่องจาก $-\frac{nc}{b} \notin \mathbb{Z}$ ดังนั้น

$-\frac{nc}{b} < t_2 < \frac{mc}{a}$ ต่อมาพิจารณา $-\frac{nc}{b} < t_2$ และ $t_2 < \frac{mc}{a}$ โดยการแก้สมการจะได้ $nc + bt_2 < 0$

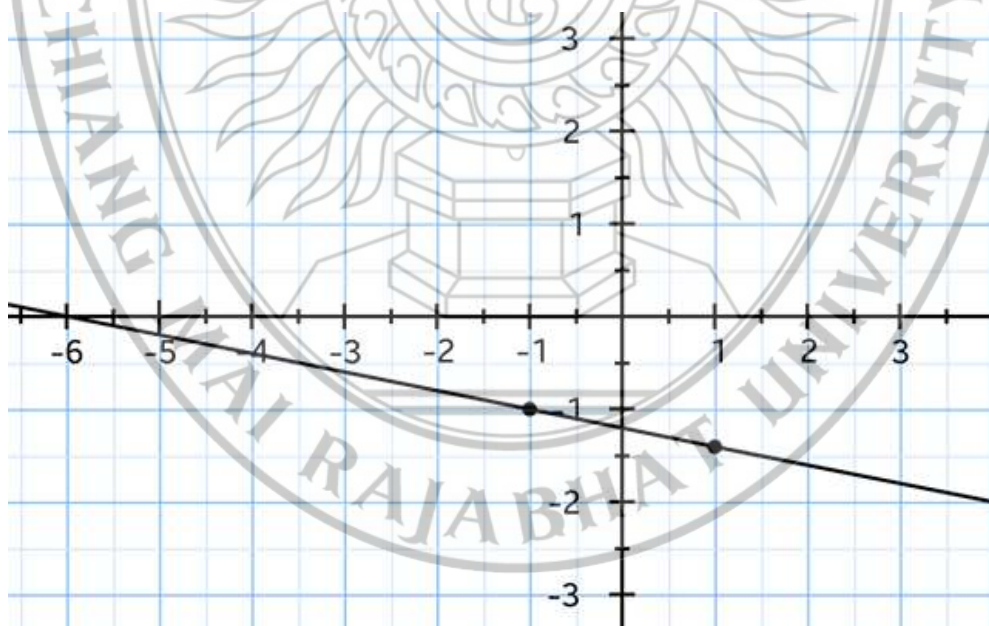
และ $mc - at_2 < 0$ ดังนั้นสมการมีผลเฉลยหนึ่งเป็น $x_0 = \frac{nc + bt_2}{d} < 0$ และ $y_0 = \frac{mc - at_2}{d} < 0$

ทั้งสองกรณีจึงสรุปได้ว่าสมการจะมีผลเฉลยที่เป็นลบ

□

ตัวอย่าง 4.2.5 (1) กำหนดสมการ $2x + 10y = -12$ ซึ่ง $(2, 10) = 2$ จะได้ $2 \mid -12$ ดังนั้นสมการมีผลเฉลย ต่อมาพิจารณา $-\frac{dc}{ab} = \frac{-(2)(-12)}{(2)(10)} > 1$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 4.2.1 สมการมีผลเฉลยที่เป็นลบ เช่น $x_0 = -1, y_0 = -1$ เป็นผลเฉลยหนึ่งที่เป็นลบของสมการ เป็นต้น โดยแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

ในจตุรภาคที่ 3



ภาพที่ 4.6 แสดงกราฟสมการ $2x + 10y = -12$

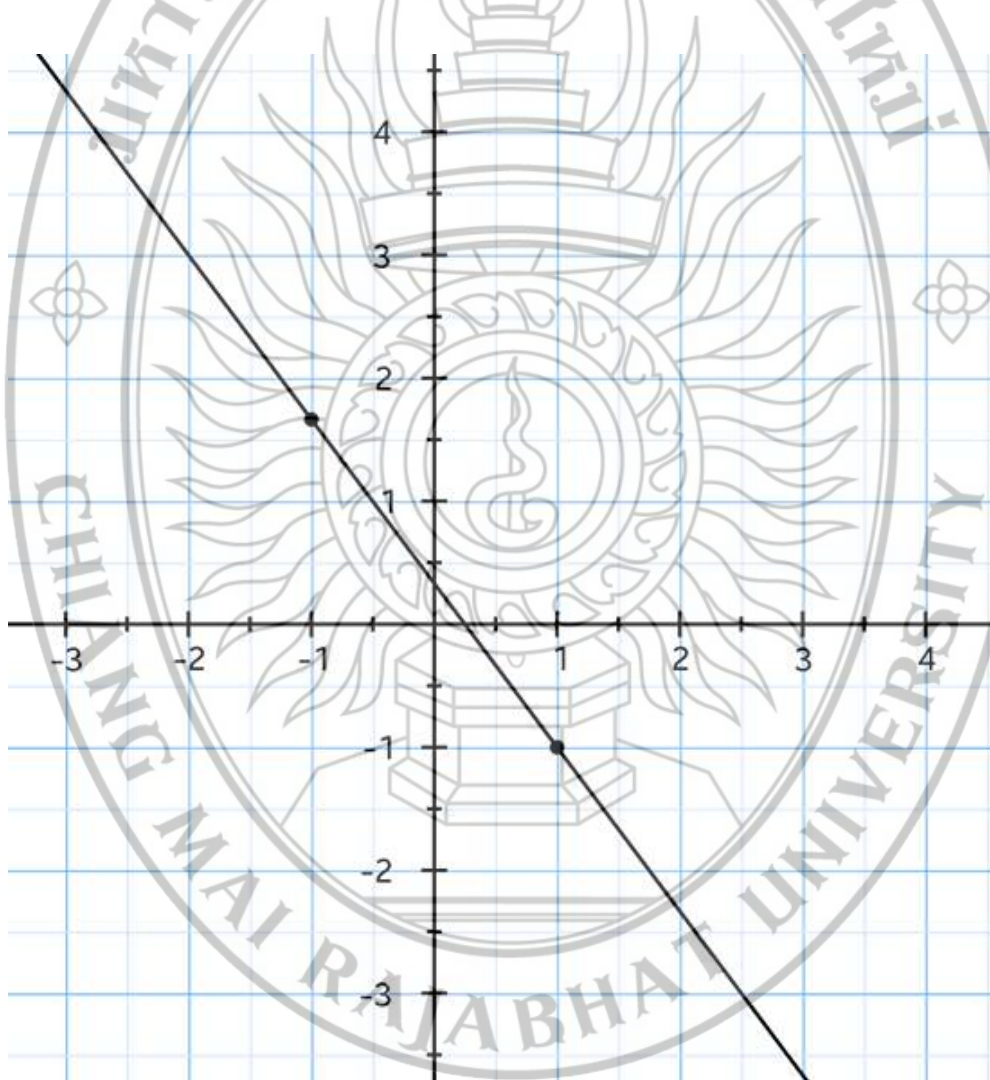
(2) กำหนดสมการ $-12x - 9y = -3$ จะได้ว่า $(-12, -9) = 3$ และ $3|-3$ ดังนั้นสมการนี้มีผลเฉลย

ต่อมา พิจารณา $\frac{dc}{ab} = \frac{(3)(-3)}{(-12)(-9)} < 1$ และพิจารณาผลรวมเชิงเส้น $3 = -12(-1) - 9(1)$ จะได้

$n = -1, m = 1$ ดังนั้น $-\frac{nc}{b} = -\frac{(-1)(-3)}{-9} \approx 0.33 \notin \mathbb{Z}$ $\frac{mc}{a} = \frac{(1)(-3)}{-12} = 0.25$ แต่

$\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil = 1 > \frac{mc}{a}$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 4.2.4 สมการไม่มีผลเฉลยที่เป็นลบ ซึ่งจะเห็นได้จากรูป

ต่อไปนี ว่าเส้นกราฟไม่ผ่านจุดภาคที่ 3 สมการ สมการไม่มีผลเฉลยที่เป็นลบ



ภาพที่ 4.7 แสดงกราฟสมการ $-12x - 9y = -3$

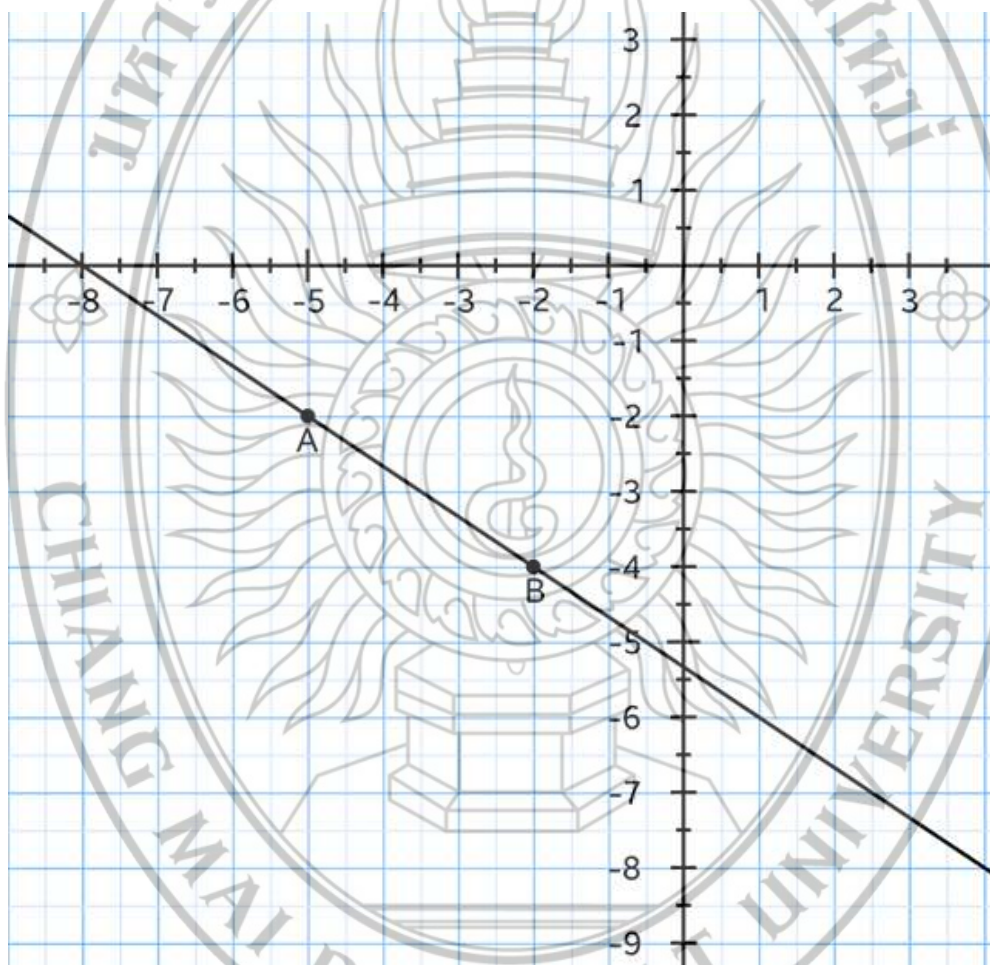
(3) กำหนดสมการ $-4x - 6y = 32$ จะได้ว่า $(-4, -6) = 2$ และ $2 \mid 32$ ดังนั้นสมการนี้มีผลเฉลย

ต่อมา พิจารณา $\frac{dc}{ab} = \frac{(2)(32)}{(-4)(-6)} \approx 2.67 \geq 1$ และพิจารณาผลรวมเชิงเส้น $2 = -4(1) - 6(-1)$ จะได้

$n=1, m=-1$ ดังนั้น $-\frac{nc}{b} = -\frac{(1)(32)}{-6} \approx 5.33 \notin \mathbb{Z}$, $\frac{mc}{a} = \frac{(-1)(32)}{-4} = 8$ และ

$\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil = 6 < \frac{mc}{a}$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 4.2.4 สมการนี้มีผลเฉลยที่เป็นลบ เช่น

$A = (-5, -2), B = (-2, -4)$ เป็นต้น ดังแสดงในรูปต่อไปนี้



ภาพที่ 4.8 แสดงกราฟสมการ $-4x - 6y = 32$

ตัวอย่าง 4.2.6 กำหนดสมการ $6x - 8y = -10$ จะได้ $(6, -8) = 2$ จะได้ $2 \mid -10$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 4.2.2 เราสามารถสรุปได้ว่าสมการจะมีผลเฉลยที่เป็นลบเป็นจำนวนอนันต์

ต่อมาลองตรวจสอบความถูกต้อง โดยพิจารณาผลรวมเชิงเส้น $2 = 6(-1) - 8(-1)$ ดังนั้น

$$n = -1, m = -1 \text{ จะได้ } x = \frac{(-1)(-10) - 8t}{2} = 5 - 4t \text{ และ } y = \frac{(-1)(-10) - 6t}{2} = 5 - 3t \text{ เป็น}$$

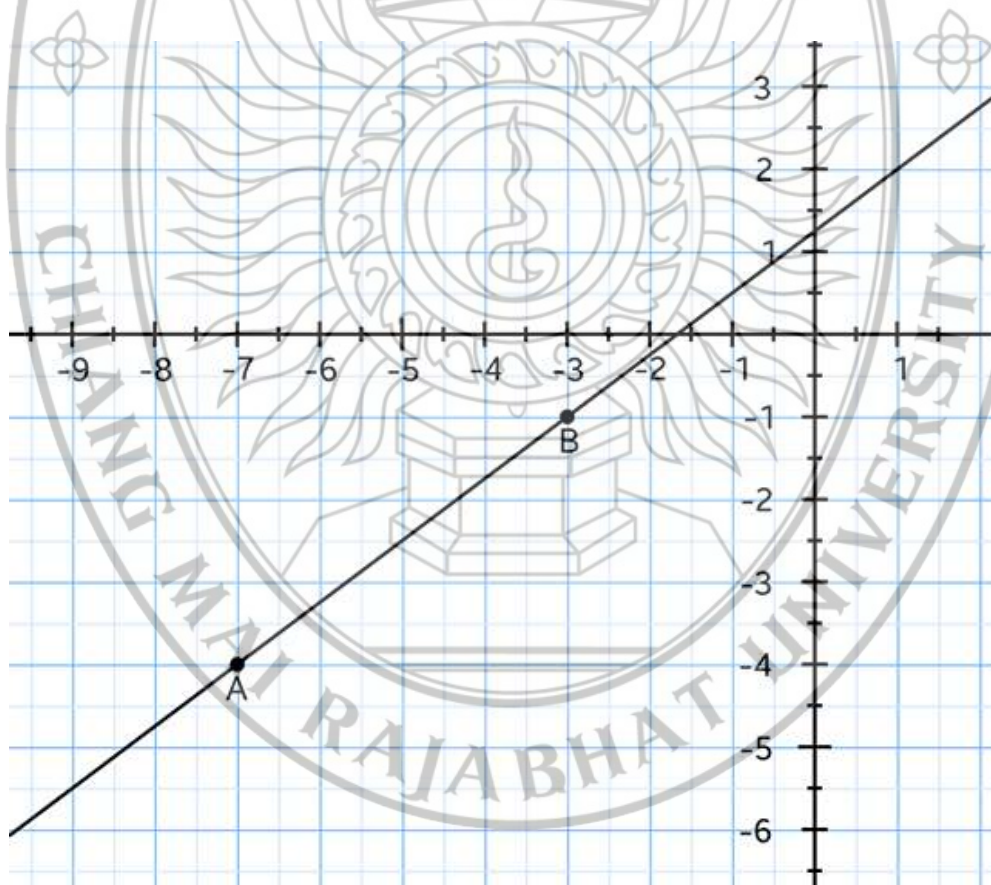
ผลเฉลยทั่วไปของสมการ ต่อมาพิจารณาค่า t ที่ทำให้ $x, y < 0$ จะได้ $5 - 4t < 0$ และ $5 - 3t < 0$

โดยเมื่อแก้สมการแล้วจะได้ $t > \max\left\{\frac{5}{4}, \frac{5}{3}\right\} \approx 1.67$ ซึ่งมีเป็นจำนวนอนันต์

เช่น ถ้า $t = 2$ จะได้ $x = -3$ และ $y = -1$ เป็นผลเฉลยที่เป็นลบของสมการ (เพราะว่า $6(-3) - 8(-1) = -10$)

ถ้า $t = 3$ จะได้ $x = -7$ และ $y = -4$ เป็นผลเฉลยที่เป็นลบของสมการ (เพราะว่า $6(-7) - 8(-4) = -10$) เป็นต้น

แสดงตัวอย่างผลเฉลยที่เป็นลบของสมการดังรูปต่อไปนี้



ภาพที่ 4.9 แสดงกราฟสมการ $6x - 8y = -10$