

บทที่ 3

ระเบียบวิธีวิจัย

3.1 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

3.1.1 ตรรกศาสตร์ (logic)

เนื่องจากการวิจัยนี้เป็นงานวิจัยที่มุ่งจะศึกษา ความรู้ตามโครงสร้างคณิตศาสตร์โดยไม่ได้ให้ความสำคัญกับการนำไปใช้ ซึ่งเราเรียกการศึกษาคณิตศาสตร์ดังกล่าว ว่า คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ (pure mathematics) มีหลายแขนง เช่น พีชคณิต (algebra) ทอพอโลยี (topology) หรือการ วิเคราะห์ (analysis) เป็นต้น การศึกษาเกี่ยวกับกึ่งกรุปก็เป็นหัวข้อหนึ่งในสายพีชคณิต และโดยทั่วไป ไม่ว่าจะเป็น จะศึกษาคณิตศาสตร์เรื่องใดก็ตาม จะต้องรู้จักกับระบบทางคณิตศาสตร์ (Mathematical system) ซึ่งประกอบไปด้วย องค์ประกอบสำคัญ 4 ส่วนได้แก่

1. พจน์นิยาม (undefined terms) คือคำที่คนส่วนใหญ่เข้าใจตรงกันว่าหมายความว่าอย่างไร แต่เกิด ความยากลำบากที่จะให้ความหมายให้รัดกุม จึงไม่มีความจำเป็นต้องอธิบายความหมายอีก เช่น จุด เส้นตรง เซต เป็นต้น พจน์ในลักษณะนี้จำเป็นต้องมีในคณิตศาสตร์ทุกแขนงเพราะการที่จะให้ความหมายของสิ่ง ๆ หนึ่ง จะต้องใช้คำที่ทราบความหมายหรือเข้าใจตรงกันแล้วมาใช้อธิบายหากไม่มีพจน์ดังกล่าวก็จะไม่มีคำตั้งต้นสำหรับใช้ อธิบายความหมายของคำอื่นๆซึ่งก็จะเกิดคำถามถึงความหมายของคำต่างๆอย่างไม่รู้จบ

2. บทนิยาม (definitions) คือการให้ความหมายของคำที่จะใช้ศึกษาในเรื่องใดเรื่องหนึ่งโดยอาศัยพจน์ นิยามหรือบทนิยามที่กำหนดไว้ก่อนหน้านี้ เช่น รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วคือรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันสองด้าน บทนิยามที่ดีต้องมีความเป็นสากลและเมื่อกำหนดขึ้นมาแล้วจะต้องไม่มีข้อโต้แย้งใดๆ

3. สัจพจน์ (axioms) คือข้อความที่ตกลงกันว่าเป็นจริงเป็นที่ยอมรับร่วมกันโดยไม่ต้องพิสูจน์ เช่น มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้

4. ทฤษฎีบท (theorems) คือ ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่สามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริงเสมอโดยอาศัย ความรู้ทางตรรกศาสตร์และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการพิสูจน์ ระบบทางคณิตศาสตร์เริ่มต้นจากการสังเกตและพิจารณาความจริงในธรรมชาติจนค้นพบข้อสรุปที่เป็นนามธรรม ซึ่งจะถูกกำหนดในรูปพจน์นิยาม บทนิยามและทฤษฎีบท หลังจากนั้นจะใช้ตรรกศาสตร์และการให้เหตุผลต่าง ๆ ช่วยในการสร้างทฤษฎีบท หรือข้อความรู้ใหม่ ในท้ายที่สุดความรู้เหล่านี้อาจนำกลับไป

ประยุกต์ใช้กับธรรมชาติต่อไปเป็นวัฏจักรเช่นนี้ไปเรื่อยๆ คำว่าทฤษฎีบทในที่นี้รวมถึงข้อความที่เกิดจากการพิสูจน์อื่นๆที่เรียกว่า บทตั้ง (lemma) และบทแทรก (corollary)

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นทั้งวิทยาศาสตร์และศิลปศาสตร์ซึ่งลักษณะพิเศษที่ทำให้คณิตศาสตร์แตกต่างจาก วิทยาศาสตร์สาขาอื่นและมีความเป็นศิลปะคือการให้เหตุผลที่เป็นแบบเฉพาะ ซึ่งเรียกว่าการให้เหตุผลเชิงนิรนัย ทำให้การศึกษาคณิตศาสตร์นั้นไม่จำกัดอยู่ที่การศึกษปรากฏการณ์ธรรมชาติที่สังเกตได้เท่านั้น แต่ยังสามารถ สร้างข้อสรุป หรือข้อยุติ (conclusion) เกี่ยวกับโครงสร้างคณิตศาสตร์ในเชิงจินตนาการได้ การสรุปข้อความ ใดๆ ในคณิตศาสตร์ต้องใช้ความสมเหตุ สมผล ภายใต้ข้อกำหนดของระบบนั้น โดยใช้ความรู้ทางตรรกศาสตร์ เพื่อหาข้อสรุปนอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังถือเป็นภาษาอย่างหนึ่งที่มีความเป็นภาษสากล (universal language) เพราะสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เช่น

$$x + y, A \cap B, \int f(x)dx, \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

เป็นสัญลักษณ์ที่ทุกชาติทุกภาษาเข้าใจตรงกัน กระบวนการให้เหตุผล (reasoning process) เป็นเครื่องมือที่นักคณิตศาสตร์ใช้แสวงหาความรู้ใหม่ ๆ โดยการนำเอาความจริงอย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่างในระบบ ซึ่งเรียกว่า เหตุหรือข้อตั้ง (premises) มาวิเคราะห์แจกแจงแสดงความสัมพันธ์ เพื่อให้เกิดความจริงอันใหม่ขึ้น ซึ่งเรียกว่า ผล หรือ ผลสรุป หรือ ข้อยุติ (conclusion) กระบวนการให้เหตุผลแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (inductive reasoning) เป็นการสรุปความรู้ใหม่ หรือสรุปผลการค้นหา ความจริง โดยอาศัยข้อสังเกตหรือผลการทดลองหลาย ๆ ตัวอย่าง จากกรณีย่อย ๆ แล้วสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไปซึ่งผลสรุปที่ได้จากการให้เหตุผลแบบนี้ไม่ได้ถูกบังคับจากเหตุที่กำหนดให้ เนื่องจากเหตุแต่ละเหตุที่กำหนดให้หรือนำมาอ้างอิงเป็นอิสระต่อกัน

ตัวอย่างเช่น จงหาพจน์ที่ n ของ $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

พิจารณาแต่ละพจน์ของลำดับต่อไปนี้

พจน์ที่ 1 คือ 1

พจน์ที่ 2 คือ 3 เขียนได้เป็น $2(2) - 1$

พจน์ที่ 3 คือ 5 เขียนได้เป็น $2(3) - 1$

พจน์ที่ 4 คือ 7 เขียนได้เป็น $2(4) - 1$

พจน์ที่ 5 คือ 9 เขียนได้เป็น $2(5) - 1$

จากการสังเกตพบว่า พจน์ที่ n จะอยู่ในรูป $2n - 1$

โดยทั่วไป การให้เหตุผลแบบอุปนัยนิยมใช้ในการศึกษาค้นคว้าสมบัติต่างๆทางวิทยาศาสตร์เช่น ข้อสรุปที่ว่า“สารสกัดที่ได้จากสะเดาสามารถใช้เป็นยากำจัดศัตรูพืชได้”เป็นข้อสรุปที่ได้จากการทดลองนำสารสกัด จากสะเดาไปกำจัดศัตรูพืชซ้ำกันหลายครั้งแล้วได้ผลตรงกันคือปริมาณศัตรูพืชลดลง หรือในทางคณิตศาสตร์ จะใช้ในเรื่องการสร้างสัจพจน์ เช่น ในเรขาคณิตแบบยูคลิด เมื่อทดลองลากเส้นตรงสองเส้นให้ตัดกัน จะพบว่า เส้นตรงสองเส้นจะตัดกันเพียงจุดเดียวเท่านั้นไม่ว่าจะทดลองลากกี่ครั้งก็ตาม จึงสรุปได้ว่าเส้นตรงสองเส้นตัดกันเพียงจุดเดียวเท่านั้น

2. การให้เหตุผลเชิงนิรนัย (deductive reasoning) เป็นการสรุปความรู้ใหม่ หรือ ข้อความจริงใหม่ ซึ่งเรียกว่าผลสรุปจากการนำข้อความที่กำหนดให้ซึ่งยอมรับว่าเป็นจริง ซึ่งเรียกว่าเหตุ ถ้าเหตุที่กำหนดให้นั้นบังคับให้เกิดผลสรุป แสดงว่าการให้เหตุผลดังกล่าวสมเหตุสมผล (valid) แต่ถ้าเหตุที่กำหนดให้ไม่สามารถจะบังคับให้เกิดผลสรุปได้ แสดงว่าการให้เหตุผลดังกล่าวไม่สมเหตุสมผล (invalid) ตัวอย่างเช่น จงพิจารณาว่าการให้เหตุผลต่อไปนี้เป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลหรือไม่เพราะเหตุใด

เหตุ 1) หมูเป็นสัตว์เลี้ยง

2) สัตว์น้ำทุกชนิดออกลูกเป็นตัว

ผลสรุป หมูออกลูกเป็นตัว

การให้เหตุผลข้างต้นนี้สมเหตุสมผลเนื่องจากโดยเหตุ 1) หมูเป็นสัตว์เลี้ยง และเหตุ 2) จะบังคับให้สัตว์น้ำทุกชนิดออกลูกเป็นตัว จึงสมเหตุสมผลที่จะสรุปว่าหมูออกลูกเป็นตัว

การให้เหตุผลเชิงนิรนัยนี้จะต้องยอมรับเหตุว่าเป็นจริงเสียก่อน เช่น จากตัวอย่างข้างต้น ถ้าเกิดการถกเถียงหรือไม่ยอมรับว่าหมูเป็นสัตว์เลี้ยงแล้ว ก็ไม่สามารถสรุปผลออกมาได้หรือได้ผลที่ไม่ตรงกัน

ในยุคแรกมนุษยศึกษาค้นคว้าความรู้ใหม่ด้วยสัญชาตญาณของความอยุ่รอดอาศัยการลองผิดลองถูกหลายครั้ง แล้วสรุปผลเป็นความรู้โดยไม่ทราบเหตุผลว่าทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ปัจจุบันมนุษย์ใช้กระบวนการให้เหตุผลมาช่วยในการแสวงหาความรู้ใหม่ การให้เหตุผลที่จะกล่าวถึงในที่นี้เป็นวิธีการให้เหตุผลโดยสรุปผลจากเหตุหรือข้อความ รู้เดิมที่ยอมรับกันมาแล้ว ซึ่งถ้าสรุปอย่างสมเหตุสมผลจะเกิดเป็นกฎหรือทฤษฎีบทโดยใช้ตรรกศาสตร์เชิงคณิตศาสตร์ซึ่งจะได้กล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

ประพจน์และค่าความจริงของประพจน์

ประพจน์ (proposition (or statement)) คือ ประโยค (sentence) ที่บอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง ดังนั้น ทุกประพจน์จะต้องมีค่าความจริงเพียงค่าเดียว คือ จริง (จะเขียนแทนด้วย T) หรือ เท็จ (จะเขียนแทนด้วย F) เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ตัวอย่าง เช่น จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ประพจน์หรือไม่เพราะเหตุใด

3 เป็นจำนวนตรรกยะ

เป็นประพจน์ เพราะตอบได้ว่าเป็นจริงเพียงอย่างเดียว

$$1 + 3 = 6$$

เป็นประพจน์ เพราะตอบได้ว่าเป็นเท็จเพียงอย่างเดียว

$$x + 3 = 7$$

ไม่เป็นประพจน์ เพราะไม่สามารถตอบได้ว่าจริงหรือเท็จเนื่องจากไม่ทราบค่า x

เราเรียกประพจน์ที่เป็นประโยคเดียวดังตัวอย่างข้างต้นว่า ประพจน์เชิงเดียว (simple statement) ในทางคณิตศาสตร์เราสามารถนำประพจน์เชิงเดียวมาเชื่อมกันได้โดยอาศัยตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ (logical connective) ซึ่งจะถูกเรียกว่าเป็น ประพจน์เชิงซ้อน (complex statement) โดยเราสามารถระบุค่าความจริงของประพจน์เชิงซ้อนได้ตามบทนิยามต่อไปนี้

นิยาม 3.1.1.1 ให้ p และ q เป็นประพจน์

ประพจน์รวม (conjunction) ของ p และ q เขียนแทนด้วย $p \wedge q$ คือประพจน์ “ p และ q ”

ซึ่งเป็นจริงเพียงกรณีเดียวคือกรณีที่ทั้ง p และ q เป็นจริง

ประพจน์เลือก (disjunction) ของ p และ q เขียนแทนด้วย $p \vee q$ คือประพจน์ “ p หรือ q ”

ซึ่งเป็นจริงเมื่ออย่างน้อย p เป็นจริงหรือ q เป็นจริง

ประพจน์มีเงื่อนไข (conditional) ของ p และ q เขียนแทนด้วย $p \rightarrow q$ คือ ประพจน์

“ถ้า p แล้ว q ” เราเรียก p ว่าเหตุ (antecedent) และเรียก q ว่าผลหรือข้อตาม (consequent) ประพจน์มีเงื่อนไขจะเป็นจริง เมื่อเหตุเป็นเท็จ หรือผลเป็นจริง

ประพจน์เงื่อนไขสองทาง (bi-conditional) ของ p และ q เขียนแทนด้วย $p \leftrightarrow q$ คือ ประพจน์ “ p ก็ต่อเมื่อ q ” (if and only if) ประพจน์เงื่อนไขสองทางนี้จะจริง เมื่อ p และ q มีความจริงเหมือนกันเท่านั้น

ประพจน์นิเสธ (negation) ของ p เขียนแทนด้วย $\sim p$ คือประพจน์ “ไม่ใช่ p ” ประพจน์นี้ จะมีความจริงตรงข้ามกับ p นั่นคือ $\sim p$ เป็นจริงเมื่อ p เป็นเท็จและ $\sim p$ เป็นเท็จเมื่อ p

เป็นจริง

จากนิยาม 3.1.1.1 นี้ สามารถสรุปค่าความจริงของประพจน์เชิงซ้อนได้ตามตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.1 ค่าความจริงของประพจน์เชิงซ้อนในแต่ละกรณี

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

นิยาม 3.1.1.2 การสมมูลกันของประพจน์การสมมูล

เราจะกล่าวว่า ประพจน์ p สมมูล (equivalence) กับประพจน์ q ก็ต่อเมื่อ ทั้งสองประพจน์มีค่าความจริงเหมือนกันในทุกกรณี ในกรณีนี้จะเขียนแทนด้วย $p \equiv q$ และเมื่อประพจน์สองประพจน์สมมูลกัน เราสามารถใช้ประพจน์นั้นแทนกันได้

นิยาม 3.1.1.3 สำหรับประพจน์ $p \rightarrow q$ เราเรียก

ประพจน์ $q \rightarrow p$ ว่า บทกลับ (converse) ของ $p \rightarrow q$

ประพจน์ $\sim q \rightarrow \sim p$ ว่า ประพจน์แย้งสลับที่ (contrapositive) ของ $p \rightarrow q$

ประพจน์ $\sim p \rightarrow \sim q$ ว่า ประพจน์ผกผัน (inverse) ของ $p \rightarrow q$

ซึ่งเราสามารถแสดงได้ว่า $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ แต่ $p \rightarrow q \not\equiv q \rightarrow p$

นิยาม 3.1.1.4 สัจนิรันดร์และข้อขัดแย้ง

เราจะกล่าวว่า ประพจน์ p เป็น สัจนิรันดร์ (tautology) ก็ต่อเมื่อ p มีความจริงเป็นจริงในทุกกรณี

เราจะกล่าวว่า ประพจน์ q เป็น ข้อขัดแย้ง (contradiction) ก็ต่อเมื่อ q มีค่าความจริงเป็นเท็จในทุกกรณี

ทฤษฎีบท 3.1.1.5 สัจนิรันดร์ที่สำคัญ: ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

T1	$p \vee \sim p$	excluded middle
T2	$\sim(\sim p) \leftrightarrow p$	
T3	ก. $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ ข. $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (associative law)
T4	ก. $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ข. $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	กฎการแจกแจง (distributive law)
T5	ก. $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ ข. $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$	กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's law)
T6	ก. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim p \vee q$ ข. $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$	
T7	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$	กฎการแย้งสลับที่ (contrapositive law)
T8	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$	modus ponens
T9	$((p \rightarrow q) \wedge (\sim q)) \rightarrow \sim p$	modus tollens
T10	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	hypothetical syllogism
T11	$(p \vee q) \wedge (\sim p) \rightarrow q$	disjunctive syllogism
T12	$p \rightarrow (p \vee q)$	addition
T13	ก. $(p \wedge q) \rightarrow p$ ข. $(p \wedge q) \rightarrow q$	simplification
T14	ก. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$ ข. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$	

$$T15 \quad p \leftrightarrow (\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q))$$

$$T16 \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$$

ประโยคเปิดและประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

ประโยคที่มีตัวแปร เช่น “ x เป็นจำนวนตรรกยะ” ไม่เป็นประพจน์เพราะตัดสินไม่ได้ว่ามีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จขึ้นกับค่าของตัวแปรที่แทนลงไป ถ้าแทน x ด้วย 2 ได้ประโยค “2 เป็นจำนวนตรรกยะ” ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริง แต่ถ้าแทน x ด้วย $\sqrt{2}$ จะได้ประโยค “ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ” ซึ่งมีค่าความจริงเป็นเท็จ ประโยคในลักษณะดังกล่าวนี้เรียกว่า ประโยคเปิด (open sentence) ที่มี x เป็นตัวแปร (ประโยคเปิดโดยทั่วไปอาจจะมิตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัวก็ได้) ประโยคเปิดอาจจะเป็นประพจน์เมื่อแทนตัวแปรเหล่านี้ด้วยสิ่งของเฉพาะเจาะจง เราเรียกหมู่ (collection) หรือเซต (set) ของสิ่งของที่นำมาแทนในประโยคเปิดแล้วมีค่าความจริงเป็น

จริงหรือเท็จเพียงอย่างเดียวหนึ่งว่า เอกภพสัมพัทธ์(universal)

สัญลักษณ์ (notation) ของประโยคเปิด P ซึ่งมีตัวแปรเป็น $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ คือ $P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ กรณีที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียวคือ x เราจะเขียน $P(x)$ แทนประโยคเปิดดังกล่าว

ในบางกรณีการระบุเอกภพสัมพัทธ์ให้กับประโยคเปิดเพียงอย่างเดียวนั้น ยังไม่เพียงพอที่จะทำให้กลายเป็นประพจน์ได้เสมอไป เช่น ประโยค “ x_1 เท่ากับ $x_2 + x_3$ ” เป็นประโยคเปิด 3 ตัวแปร ถ้าแทนประโยคนี้ด้วย $P(x_1, x_2, x_3)$ และให้เอกภพสัมพัทธ์คือ เซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ แล้ว $P(1, 2, 3)$ คือ “ $1 = 2 + 3$ ” มีค่าความจริงเป็นเท็จ ส่วน $P(3, 2, 1)$ คือ “ $3 = 2 + 1$ ” มีค่าความจริงเป็นจริง วิธีหนึ่งของการสร้างประพจน์จาก $P(x)$ ที่ระบุเอกภพสัมพัทธ์แล้ว คือ การเติม ตัวบ่งปริมาณ (Quantifiers) ลงไป ซึ่งตัวบ่งปริมาณที่ใช้นำหน้าประโยคเปิดมี 2 ชนิดคือ

1. ตัวบ่งปริมาณสำหรับทุกตัว (universal quantifier) “ $\forall$ ” อ่านว่า “สำหรับทุก” หรือ “สำหรับแต่ละ” หรือ “ทุกๆ” (for-all)

2. ตัวบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริง (existential quantifier) “ $\exists$ ” อ่านว่า “มี” หรือ “อย่างน้อยหนึ่ง” หรือ “มีบางตัว”

บทนิยาม 3.1.1.6 ค่าความจริงของประพจน์

ให้ $P(x)$ เป็นประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์

ประพจน์ $\forall x \in U [P(x)]$ มีค่าความจริงเป็น จริง ก็ต่อเมื่อ ทุก $x \in U$ เมื่อแทนใน $P(x)$

แล้ว มีค่าความจริงเป็นจริง

ประพจน์ $\exists x \in U[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มี $a \in U$ บางตัว ที่เมื่อแทนใน $P(x)$ แล้ว $P(a)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

นิยาม 3.1.1.7 ตัวบ่งปริมาณมีเพียงสิ่งเดียว

สำหรับประโยคเปิด $P(x)$ ประพจน์ในรูปสัญลักษณ์ “ $\exists!x[P(x)]$ ” อ่านว่า “มี x เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่เป็น $P(x)$ ” และเรียกสัญลักษณ์ $\exists!$ ว่า ตัวบ่งปริมาณมีเพียงสิ่งเดียว (unique existence quantifier) ซึ่งประพจน์ “ $\exists!x[P(x)]$ ” จะเป็นจริง ก็ต่อเมื่อมี “ a ” เพียงตัวเดียวเท่านั้นในเอกภพสัมพัทธ์ที่ทำให้ “ $P(a)$ ” เป็นจริง

3.1.2 วิธีการพิสูจน์ประพจน์ตามตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์

การพิสูจน์ (proof) คือการอธิบาย การอ้างเหตุผล (argument) อย่างสมเหตุสมผลของข้อความจริงที่เรียกว่ากฎ หรือทฤษฎีบท การพิสูจน์โดยทั่วไปจะเริ่มจากสมมติฐาน (hypothesis or assumption) ในกฎหรือทฤษฎีบท และดำเนินการอ้างเหตุผลเพื่อให้ได้ข้อสรุปหรือข้อยุติ (conclusion) ของกฎหรือทฤษฎีบทนั้นโดยใช้ข้อความที่เป็นสมมติฐาน บทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทก่อนหน้านี้ที่ยอมรับว่าเป็นจริง การอ้างเหตุผลจากสมมติฐาน แล้วได้ข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผลในเชิงตรรกศาสตร์ หมายความว่า ข้อสรุปเป็นจริงเมื่อใดก็ตามที่ทุกข้อความในสมมติฐานเป็นจริง นั่นคือประพจน์ q เป็นข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผลจากสมมติฐาน $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ ก็ต่อเมื่อรูปแบบของประพจน์ $(h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \wedge \dots \wedge h_n) \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

ในการเขียนพิสูจน์ข้อความหนึ่ง เราจะนำรูปแบบของประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์ตามที่กล่าวไว้แล้วในทฤษฎีบท 3.1.1.5 (T1 ถึง T16) มาใช้ด้วยเหตุผลหลายประการ เหตุผลประการแรกคือ รูปแบบของประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์จะนำไปเขียนในขั้นตอนใดก็ได้ของการพิสูจน์ (ตามที่ต้องการ) เช่น การพิสูจน์เกี่ยวกับ “จำนวนจริง x ” เราอาจจะแทนด้วย “ $x = 0$ หรือ $x \neq 0$ ” ได้เนื่องจาก $p \vee \sim p$ เป็นสัจนิรันดร์ (T1) อีกประการหนึ่งคือประพจน์สัจนิรันดร์ T1 ถึง T16 ส่วนใหญ่อยู่ในรูปของประพจน์เชิงซ้อน 2 ประพจน์เชื่อมด้วยตัวเชื่อมหลัก “ $\leftrightarrow$ ” ทำให้ประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกันในทุกกรณี ดังนั้นในขั้นตอนของการพิสูจน์ เราสามารถเขียนประพจน์ที่สมมูลกันแทนกันได้เช่น ถ้าขั้นตอนหนึ่งของการพิสูจน์คือประพจน์

“ไม่เกิดกรณีที่ x เป็นจำนวนเฉพาะ และ $x \geq 30$ ”

เราอาจใช้ T5 และแทนด้วยประโยคใหม่เป็น

“ x ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $x < 30$ ”

ประพจน์ที่เป็นขั้นตอนหนึ่งของการพิสูจน์มักจะเป็นข้อสรุปตามมาจากขั้นตอนก่อนหน้านี้ หรือจากความรู้อื่น เราอาจใช้ T8 ในการอ้างเหตุผลได้นั่นคือ เราอาจจะสรุปว่าประพจน์ q เป็นจริงได้

ในขั้นตอนต่อจากที่ได้แล้วว่าประพจน์ทั้งสองคือ p และ $p \rightarrow q$ เป็นจริงซึ่งได้จากขั้นตอนการพิสูจน์ก่อนหน้านี้ เราเรียกหลักเกณฑ์นี้ว่า หลักเกณฑ์โมดัส โพนิน (modus ponens) ซึ่งใช้บ่อยมากในการพิสูจน์

การพิสูจน์ข้อความหนึ่งว่าเป็นจริง เราจะต้องหาให้ได้ก่อนว่าข้อความที่จะพิสูจน์นั้นมีสมมติฐานว่าอย่างไรและข้อสรุปว่าอย่างไร โดยทั่วไปแล้วข้อความที่เป็นสมมติฐานจะกล่าวไว้ในรูป “สมมติ p ” เพื่อเตือนว่าข้อความนี้ไม่ได้มาจากการพิสูจน์จากข้อความอื่น และในแต่ละขั้นของการพิสูจน์จะต้องถามตัวเองว่าการอนุมานขั้นหนึ่งว่าเป็นจริงนั้น ได้มาจากสัจนิรันดร์หรือสัจพจน์หรือทฤษฎีบทใดเพื่อป้องกันข้อผิดพลาด วิธีการพิสูจน์จะขึ้นกับรูปแบบเชิงตรรกศาสตร์ทั้งตัวเชื่อมประพจน์และตัวบ่งปริมาณของข้อความนั้นๆ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

วิธีการพิสูจน์ประพจน์ตามตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงวิธีการพิสูจน์ประพจน์หรือข้อความในรูปแบบต่าง ๆ ตามตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์เพื่อเป็นแนวคิดสำหรับใช้ในการพิสูจน์ในงานวิจัยขั้นนี้ต่อไปโดยจะยกตัวอย่างประกอบในบางกรณีพอสังเขปให้พอเข้าใจระเบียบวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเราแยกวิธีการพิสูจน์ประพจน์ตามรูปแบบของประพจน์ดังนี้

1. การพิสูจน์ประพจน์ในรูป $p \rightarrow q$

วิธีการพิสูจน์ $p \rightarrow q$ ที่นิยมใช้กันมากมี 2 วิธีซึ่งได้แก่คือ การพิสูจน์ตรง (direct proof) และ การพิสูจน์แย้งสลับที่ (contrapositive proof) ซึ่งแต่ละวิธีมีรูปแบบการพิสูจน์ดังต่อไปนี้

วิธีที่ 1 การพิสูจน์ตรง

เนื่องจาก $p \rightarrow q$ เป็นเท็จเพียงกรณีเดียวคือ กรณีที่ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ ดังนั้นถ้าต้องการพิสูจน์ว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริง เราต้องแสดงให้เห็นว่าไม่เกิดกรณีที่ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ นั่นคือแสดงโดยตรงว่าเมื่อให้ p เป็นจริงแล้ว จะได้ q จริง

ดังนั้น การพิสูจน์โดยวิธีตรงเราจะเริ่มต้นจากให้ p เป็นจริง แล้วเรียงลำดับประพจน์ที่ทราบแล้วว่าเป็นจริงพร้อมให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลจนได้ข้อสรุป q ซึ่งสรุปได้ดังนี้

สรุปขั้นตอนการพิสูจน์ตรง

- (1) ให้ p เป็นจริง
- (2) อ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลซึ่งอาจมีการใช้นิยามหรือทฤษฎีบทต่างๆก่อนหน้านี้มากกว่า 1 ครั้ง
- (3) สรุปให้ได้ q

ตัวอย่าง 3.1.2.1 จงพิสูจน์ว่า “ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว n^2 จะเป็นจำนวนเต็มคู่”

การพิสูจน์ ก่อนอื่นพิจารณานิยามหรือทฤษฎีบทหรือความรู้ที่เป็นข้อเท็จจริงที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์นี้ ก่อน ซึ่งในที่นี้ก็คือนิยามของจำนวนเต็มคู่ ซึ่งกล่าวว่า “ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จะกล่าวว่า n เป็นจำนวนเต็มคู่ (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$ ” จากนั้นจะเริ่มการพิสูจน์ดังนี้

ให้ n เป็น จำนวนเต็มคู่
 จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$
 ดังนั้น $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ เมื่อ $2k^2$ เป็นจำนวนเต็ม
 ดังนั้นโดยนิยามของจำนวนเต็มคู่ จึงสรุปได้ว่า n^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

วิธีที่ 2 การพิสูจน์แย้งสลับที่

จาก T7 ได้ว่า $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim q \rightarrow \sim p$ ดังนั้นการพิสูจน์วิธีนี้จะเป็นการการพิสูจน์ $\sim q \rightarrow \sim p$ โดยวิธีตรง แล้วสรุป $p \rightarrow q$ เป็นจริง

สรุปขั้นตอนการพิสูจน์แย้งสลับที่

(1) สร้างข้อความแย้งสลับที่ $\sim q \rightarrow \sim p$

(2) ทำการพิสูจน์ตรงข้อความ $\sim q \rightarrow \sim p$ โดย

2.1 ให้ $\sim q$ เป็นจริง

2.2 อ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลซึ่งอาจมีการใช้นิยามหรือทฤษฎีบทต่างๆก่อนนี้มากกว่า 1 ครั้ง

2.3 สรุปให้ได้ $\sim p$

(3) สรุป $p \rightarrow q$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.1.2.2 จงพิสูจน์ว่า “ถ้า n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว n จะเป็นจำนวนเต็มคี่”

การพิสูจน์ โดย T7 จะได้ข้อความที่ต้องการพิสูจน์สมมูลกับข้อความ “ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว n^2 จะเป็นจำนวนเต็มคี่” ดังนั้นเราจะพิสูจน์ข้อความนี้ โดยวิธีตรง ซึ่งก่อนอื่นพิจารณานิยามหรือทฤษฎีบทหรือความรู้ที่เป็นข้อเท็จจริงที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์นี้ก่อน ซึ่งในที่นี้ก็คือนิยามของจำนวนเต็มคี่ ซึ่งกล่าวว่า “ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จะกล่าวว่า n เป็น จำนวนเต็มคี่ (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$ ” จากนั้นจะเริ่มการพิสูจน์ดังนี้

ข้อความแย้งสลับที่คือ “ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว n^2 จะเป็นจำนวนเต็มคี่”

ทำการพิสูจน์ตรงข้อความดังกล่าว โดย

ให้ n เป็น จำนวนเต็มคี่

โดยนิยามของจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

ดังนั้น $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ เมื่อ $2k^2 + 2k$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้นโดยนิยามของจำนวนเต็มคือ จึงสรุปได้ว่า n^2 เป็นจำนวนเต็มคือ

โดยการพิสูจน์อ้อมนี้จึงสรุปว่า “ถ้า n^2 เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว n จะเป็นจำนวนเต็มคู่”

2. การพิสูจน์ประพจน์ p โดยข้อขัดแย้ง (proof of p by contradiction)

จากประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์ T15 เราได้ว่า p สมมูลกับ $\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)$ ดังนั้น การพิสูจน์ $\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)$ จึงเพียงพอที่จะสรุปว่าประพจน์ p เป็นจริง และจะเห็นว่าการพิสูจน์ $\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)$ นั้น อยู่ในรูปแบบของการพิสูจน์ตรง ซึ่งจะต้องได้ผลสรุปเป็นข้อขัดแย้งกันคือ $(q \wedge \sim q)$

การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งสามารถใช้กับประพจน์หรือข้อความใดก็ได้ ในขณะที่การพิสูจน์ตรงและการพิสูจน์แย้งสลับที่จะใช้กับประพจน์มีเงื่อนไขเท่านั้น ในการพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งนี้เราจะไม่เห็นประพจน์ q ปรากฏ และเราไม่ทราบว่าจะใช้ประพจน์ใดสำหรับ q แต่จะพบประพจน์หนึ่งที่เหมาะสมในขั้นตอนของการพิสูจน์

สรุปขั้นตอนการพิสูจน์ประพจน์ p โดยข้อขัดแย้ง

(1) ทำการพิสูจน์ตรงข้อความ $\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)$ โดย

1.1 ให้ $\sim p$ เป็นจริง

1.2 อ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลซึ่งอาจมีการใช้นิยามหรือทฤษฎีบทต่างๆก่อนหน้านี้มากกว่า 1 ครั้ง

1.3 สรุปให้ได้ $q \wedge \sim q$ สำหรับบางประพจน์ q ที่เหมาะสม

(2) สรุปว่าประพจน์ p เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.1.2.3 จงพิสูจน์ว่า “ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ”

การพิสูจน์ พิจารณานิยามหรือทฤษฎีบทหรือความรู้ที่เป็นข้อเท็จจริงที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์นี้ก่อน ซึ่งในที่นี้ก็คือนิยามของจำนวนอตรรกยะและจำนวนตรรกยะ ซึ่งกล่าวว่า

ให้ r, s เป็นจำนวนจริง จะกล่าวว่า

r เป็น จำนวนตรรกยะ (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b โดยที่ $b \neq 0$

ที่ทำให้ $r = \frac{a}{b}$

s เป็น จำนวนอตรรกยะ (irrational number) ก็ต่อเมื่อ s ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

จากนั้นจะเริ่มการพิสูจน์ดังนี้

ให้ $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนอตรรกยะ นั่นคือ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

โดยนิยามจำนวนตรรกยะ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม a และ b โดยที่ $b \neq 0$ ที่ทำให้ $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

ซึ่งในที่นี้ไม่เสียใจทั่วไปที่จะสมมติว่า $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

จะได้ $2 = \frac{a^2}{b^2}$ (โดยการยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ) และได้ว่า $a^2 = 2b^2$

โดยนิยามของจำนวนเต็มคู่จะได้ a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

โดยตัวอย่าง 3.1.2.2 ซึ่งได้พิสูจน์แล้วว่าเป็นจริง สามารถสรุปได้ว่า a เป็นจำนวนเต็มคู่

โดยนิยามของจำนวนเต็มคู่จะได้ $a = 2k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

จาก $a^2 = 2b^2$ จะได้ $(2k)^2 = 2b^2$ ดังนั้น $4k^2 = 2b^2$ และได้ว่า $b^2 = 2k^2$

โดยนิยามของจำนวนเต็มคู่จะได้ b^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

โดยตัวอย่าง 3.1.2.2 ซึ่งได้พิสูจน์แล้วว่าเป็นจริง สามารถสรุปได้ว่า b เป็นจำนวนเต็มคู่

จะได้ $b = 2m$ สำหรับบางจำนวนเต็ม m

ดังนั้น $\frac{a}{b} = \frac{2k}{2m}$ ซึ่งไม่เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ ขัดแย้งกับที่สมมติไว้ว่า $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

เพราะฉะนั้น $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

จากตัวอย่าง 3.1.2.3 จะเห็นว่าเราจบการพิสูจน์ด้วยประพจน์ $q \wedge \sim q$ เมื่อ q คือประพจน์ $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ ซึ่งเราไม่สามารถทราบล่วงหน้าได้ก่อนการพิสูจน์ จะต้องใช้การสังเกตไปในระหว่างการพิสูจน์เพื่อหาประพจน์ q ที่เหมาะสม

3. การพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow q$ โดยข้อขัดแย้ง

การพิสูจน์นี้ทำได้โดยสมมติให้ $\sim(p \rightarrow q)$ เป็นจริง แล้วหาข้อความขัดแย้งกัน เนื่องจากประพจน์ $\sim(p \rightarrow q)$ สมมูลกับประพจน์ $p \wedge \sim q$ ดังนั้นเราจะพิสูจน์ประพจน์

$(p \wedge \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r)$ สมมูลกับประพจน์ $p \rightarrow q$

สรุปขั้นตอนการพิสูจน์ประพจน์ p โดยข้อขัดแย้ง

(1) ทำการพิสูจน์ตรงข้อความ $(p \wedge \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r)$ โดย

1.1 ให้ $p \wedge \sim q$ เป็นจริง ซึ่งก็คือการให้ทั้ง p และ $\sim q$ เป็นจริง

1.2 อ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลซึ่งอาจมีการใช้นิยามหรือทฤษฎีบทต่างๆก่อนนี้มากกว่า 1 ครั้ง

1.3 สรุปให้ได้ $r \wedge \sim r$ สำหรับบางประพจน์ r ที่เหมาะสม

(2) สรุปว่าประพจน์ $p \rightarrow q$ เป็นจริง

4. การพิสูจน์ประพจน์ในรูป $p \leftrightarrow q$

จากประพจน์ $p \leftrightarrow q$ สมมูลกับ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ดังนั้นเราจะพิสูจน์ว่า $p \leftrightarrow q$ เป็นจริง โดยพิสูจน์ให้ได้ว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริง และ $q \rightarrow p$ เป็นจริงโดยวิธีใดก็ได้

สรุปขั้นตอนการพิสูจน์ประพจน์ในรูป $p \leftrightarrow q$

(1) พิสูจน์ว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริง ตามขั้นตอนก่อนหน้านี้ที่เหมาะสม

(2) พิสูจน์ว่า $q \rightarrow p$ เป็นจริง ตามขั้นตอนก่อนหน้านี้ที่เหมาะสม

(3) สรุป $p \leftrightarrow q$ เป็นจริง

5. การพิสูจน์ประพจน์ในรูป $(p \vee q) \rightarrow r$ การพิสูจน์นี้เรียกอีกอย่างว่า การพิสูจน์แบบแจกกรณี โดยอาศัยสัจนิรันดร์ T14 ก. ที่ว่า $p \vee q \rightarrow r$ สมมูลกับ

$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ ดังนั้นในการพิสูจน์ว่า $(p \vee q) \rightarrow r$ เป็นจริง เราจะพิสูจน์ว่า $p \rightarrow r$ เป็นจริง และพิสูจน์ $q \rightarrow r$ เป็นจริง

สรุปขั้นตอนการพิสูจน์ประพจน์ในรูป $(p \vee q) \rightarrow r$

(1) พิสูจน์ว่า $p \rightarrow r$ เป็นจริง ตามขั้นตอนก่อนหน้านี้ที่เหมาะสม

(2) พิสูจน์ว่า $q \rightarrow r$ เป็นจริง ตามขั้นตอนก่อนหน้านี้ที่เหมาะสม

(3) สรุป $(p \vee q) \rightarrow r$ เป็นจริง

6. การพิสูจน์ประพจน์ในรูป $p \vee q$

จากประพจน์สัจนิรันดร์ T6 ได้ว่า $p \vee q$ สมมูลกับ $\sim p \rightarrow q$ ดังนั้นเราจะพิสูจน์ว่า $\sim p \rightarrow q$ เป็นจริงแทน

ในอีกทางหนึ่ง เนื่องจาก $p \vee q$ สมมูลกับ $q \vee p$ เช่นกัน ดังนั้นในทำนองเดียวกัน การพิสูจน์ว่า $p \vee q$ เป็นจริงเราอาจจะพิสูจน์ว่า $\sim q \rightarrow p$ เป็นจริงแทนก็ได้เช่นกัน

สรุปขั้นตอนการพิสูจน์ประพจน์ในรูป $p \vee q$

(1) พิสูจน์ว่า $\sim p \rightarrow q$ เป็นจริงหรือพิสูจน์ว่า $\sim q \rightarrow p$ เป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่งตามขั้นตอนก่อนหน้านี้ที่เหมาะสม

(2) สรุป $p \vee q$ เป็นจริง

3.2 การรวบรวมข้อมูล

เนื่องจากเป็นงานวิจัยเชิงคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ซึ่งมุ่งเน้นการสร้างองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในเชิงนามธรรม จึงใช้การสร้างตัวอย่างให้เห็นเป็นข้อมูลเบื้องต้นหลายๆตัวอย่าง แล้วใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยในหัวข้อ 3.1 เพื่อตั้งสมมติฐานซึ่งคาดว่าจะเป็นอย่างจริง

3.3 การวิเคราะห์ข้อมูล

จากการรวบรวมข้อมูลในหัวข้อ 3.2 จนได้สมมติฐานหรือข้อสังเกตแล้ว จะทำการตรวจสอบหรือพิสูจน์สมมติฐานโดยระเบียบวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในหัวข้อ 3.1 อีกครั้งหนึ่ง แล้วสรุปผลเป็นทฤษฎีบทหรือองค์ความรู้ใหม่

