

บทที่ 2

วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะแนะนำให้รู้จักแนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์ รวมถึงนิยาม ทฤษฎีบท และผลจากการศึกษาต่างๆที่ผ่านมาของนักวิจัยหลายๆคน โดยนิยาม ทฤษฎีบท และผลจากการศึกษาทั้งหมดที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้อ้างอิงมาจากตำรา Burton D. M. (2002). *Elementary number theory*. (5th ed.). New York: McGraw-Hill. และ Rosen K. H. (1993). *Elementary number theory and its applications*. (3rd ed.). New York: Addison-Wesley.

โดยนิยาม ทฤษฎีบท และผลจากการศึกษาที่ได้อ้างอิงมาจากแหล่งอื่นๆนอกเหนือจากนี้ จะอ้างอิงเพิ่มเติมให้เห็นที่มาอย่างชัดเจน

2.1 แนวคิดเบื้องต้น (Elementary concepts)

การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $ax + by = c$ ก็คือการหาค่า x และ y ที่ทำให้สมการเป็นจริง โดยจะสนใจหาเฉพาะผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น เช่น พิจารณาสมการ $3x + 15y = 9$ จะพบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $x = -2$ และ $y = 1$ (หรือเขียนผลเฉลยในรูปคู่อันดับ $(-2, 1)$) เพราะว่า $3(-2) + 15(1) = 9$

สำหรับสัญลักษณ์ $d = (a, b)$ จะหมายถึง d เป็นตัวหารร่วมมากของ a และ b และจะเขียน $a|b$ แทนการที่ a หาร b ลงตัวเมื่อ $a \neq 0$ ในการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับตัวหารร่วมมากและการหารลงตัว นำไปสู่ผลลัพธ์ที่ทราบกันดีว่า

(1) สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ จะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $d | c$ เมื่อ $d = (a, b)$

ยิ่งกว่านั้น ถ้าทราบผลเฉลยเฉพาะ $x = x_0$ และ $y = y_0$ ชุดหนึ่งของสมการ ก็จะสามารถพิสูจน์ได้ว่า

(2) ผลเฉลยใดๆหรือเรียกว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการจะอยู่ในรูป $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ และ

$y = y_0 - \frac{a}{d}t$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็ม

สมการไดโอแฟนไทน์บางชนิดไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก (Burton, 2002, p. 241-242) แต่สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปรนั้นอาจมีหรือไม่มีก็ได้ ในงานวิจัยนี้ เราใช้ผลลัพธ์ (1) และ (2) เป็นแนวคิดหลัก ประกอบกับสมบัติของจำนวนเต็มหลายๆประการเพื่อแสดงเงื่อนไขที่จะทำให้สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปรมีผลเฉลยที่เป็นบวก (ซึ่งในงานวิจัยนี้หมายถึงทั้งสองค่าของตัว

แปรต้องเป็นบวก) โดยใช้ระเบียบวิธีการพิสูจน์และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และจะศึกษาเฉพาะในกรณีที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ เนื่องจาก ถ้า $a = 0$ แล้วจะได้ $(0)x + by = c$ นั่นคือ $by = c$ ดังนั้น $y = \frac{c}{b}$ ทำให้ได้ว่าผลเฉลยจะอยู่ในรูปคู่อันดับ $(x, \frac{c}{b})$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มใดๆ ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $b = 0$ ผลเฉลยจะอยู่ในรูปคู่อันดับ $(\frac{c}{a}, y)$ เมื่อ y เป็นจำนวนเต็มใดๆ

2.2 ความรู้พื้นฐาน (Basic concepts)

ในส่วนแรกนี้จะกล่าวถึงนิยาม และทฤษฎีบทที่สำคัญที่จะนำมาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักในบทที่ 4 ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2.1 ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ แล้วสมการเชิงเส้นในรูป $ax + by = c$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็ม จะเรียกว่า สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร

ทฤษฎีบทที่ 2.2.2 ถ้า $d = (a, b)$ แล้ว d สามารถเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นของ a และ b ได้ นั่นคือ จะมีจำนวนเต็ม m และ n โดยที่ $d = an + bm$ (Burton, 2002, p. 22)

ตัวอย่างที่ 2.2.3 กำหนดให้ $a = 24$ และ $b = 9$ โดยที่ $(24, 9) = 3$

จะได้ $n = -1$ และ $m = 3$ โดยที่ $3 = 24(-1) + 9(3)$

ทฤษฎีบทที่ 1.4 และ 1.5 ต่อไปนี้ (Burton, 2002, p. 34) เป็นที่ทราบกันอย่างแพร่หลายในการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ ซึ่งแสดงให้เห็นเงื่อนไขการมีผลเฉลยของสมการ

ทฤษฎีบทที่ 2.2.4 สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม และ $a, b \neq 0$ สมการจะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $d \mid c$ เมื่อ $d = (a, b)$

ทฤษฎีบทที่ 2.2.5 ถ้าสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มี $x = x_0$ และ $y = y_0$ เป็นผลเฉลยเฉพาะแล้ว ทุกผลเฉลยของสมการอยู่ในรูป

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t \text{ และ } y = y_0 - \frac{a}{d}t \text{ เมื่อ } t \in \mathbb{Z} \text{ และ } d = (a, b)$$

บทนิยาม 2.2.6 ให้ x เป็นจำนวนจริง ใช้สัญลักษณ์ $\lceil x \rceil$ แทนฟังก์ชันเพดาน (ceiling function) ของ x ซึ่งหมายถึงจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x (Rosen, 1993, p. 6)

เช่น $\lceil 0.1 \rceil = 1$, $\lceil 3 \rceil = 3$, $\lceil -2.6 \rceil = -2$ เป็นต้น

ข้อสังเกตที่ 2.2.7 ถ้ามีจำนวนเต็มในช่วงเปิด (a, b) เมื่อ $b - a \leq 1$ แล้ว จะมีจำนวนเต็มอยู่ในช่วงเปิดนี้เพียงจำนวนเดียว

การพิสูจน์ ให้ $b - a \leq 1$ และสมมติ มี $p, q \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $p, q \in (a, b)$ และ $p \neq q$

โดยไม่เสียทั่วไป สมมติให้ $q > p$ ดังนั้นจะได้ $q - p \geq 1$ จาก $p, q \in (a, b)$ จะได้ $b > q$ และ $p > a$ ดังนั้น $b + p > q + a$ ซึ่งแก้อสมการได้ $b - a > q - p$ ขัดแย้งกับ $b - a \leq 1$ และ $q - p \geq 1$ เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนเต็มในช่วงเปิด (a, b) เพียงตัวเดียว $\square$

ข้อสังเกตที่ 2.2.8 จากทฤษฎีบทที่ 2.2.2 และทฤษฎีบทที่ 2.2.4 ถ้า $d \mid c$ แล้ว

จาก $an + bm = d$ จะได้ $an \cdot \frac{c}{d} + bm \cdot \frac{c}{d} = d \cdot \frac{c}{d}$ และได้ $a(\frac{nc}{d}) + b(\frac{mc}{d}) = c$ เมื่อ $\frac{nc}{d}, \frac{mc}{d} \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น ถ้าสมการ $ax + by = c$ มีผลเฉลย แล้ว จะได้ว่าผลเฉลยเฉพาะชุดหนึ่งมีค่าเป็น

$x_0 = \frac{nc}{d}, y_0 = \frac{mc}{d}$ และโดยทฤษฎีบท 2.2.5 ทำให้ได้ผลเฉลยทั่วไปในรูป

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t = \frac{nc}{d} + \frac{b}{d}t = \frac{nc + bt}{d} \text{ และ } y = y_0 - \frac{a}{d}t = \frac{mc}{d} - \frac{a}{d}t = \frac{mc - at}{d} \quad \square$$